avtoris stili daculia

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

მარიამ ბერიაშვილი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

დამატებითი სიმრავლურ-თეორიული აქსიომების გამოყენება ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიასა და ზომის თეორიაში

სადოქტორო დისერტაცია

ხელმძღვანელები:

სადოქტორო პროგრამის ხელმძღვანელი:

თსუ სრული პროფესორი როლანდ ომანაძე

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

ფიზ. – მათ. მეცნიერებათა დოქტორი ალექსანდრე ხარაზიშვილი

უნივერსიტეტის გამომცემლობა

თბილისი 2014 წელი

Some applications of additional set-theoretical axioms in the theory of real-valued functions and measure theory

Abstract

Intensive research in mathematical analysis, theory of functions and measure theory may be regarded as a basis for studying various paradoxical point sets. We consider certain types of interesting and important point sets on the real line, such as Vitali sets, Bernstein sets, Hamel bases, Luzin sets, and Sierpinski sets. These classical pathological subsets of the real line are envisaged and their various descriptive properties are investigated from the measure-theoretical view-point.

In this thesis we are dealing with the above-mentioned sets in light of function theory and measure theory, and establish some interrelations between them. In particular, it is shown that:

(a) the existence of an additive function from $\mathbf{R}$ into $\mathbf{R}^2$, whose range contains three non-collinear points, implies (within ZF & DC theory) the existence of a nontrivial solution of Cauchy's functional equation;

(b) there exists a translation invariant measure μ on $\mathbf{R}$ extending the standard Lebesgue measure and such that all Sierpinski sets are measurable with respect to μ;

(c) the relative measurability of a real-valued function with respect to the class of non-separable sigma-finite measures implies the relative measurability of the same function with respect to the class of separable sigma-finite measures.

შესავალი

წინამდებარე სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება სიმრავლეთა თეორიისა და დამატებითი სიმრავლურ-თეორიული აქსიომების ზოგიერთ გამოყენებას ზომის თეორიასა და მათემატიკურ ანალიზში. ცნობილია, რომ სიმრავლეთა თეორიას გერმანელმა მათემატიკოსმა გეორგ კანტორმა XIX საუკუნის ბოლოს ჩაუყარა საფუძველი. მათემატიკური ანალიზის კონკრეტული საკითხების კვლევისას წარმოქმნილმა სიძნელეებმა მიიყვანა კანტორი სიმრავლურ-თეორიული ცნებებისა და მეთოდების შემოტანის აუცილებლობამდე. მოგვიანებით ცხადი გახდა, რომ ამ ცნებებისა და მეთოდების შემოღებამ ძირფესვიანად შეცვალა მათემატიკური კონცეფციები და მიდგომები. შემდგომში, კანტორის გარდა სიმრავლეთა თეორიის განვითარებას და ჩამოყალიბებას მრავალმა გამოჩენილმა მათემატიკოსმა შეუწყო ხელი, მათ შორის იყვნენ ბერი, ბორელი, ლებეგი, ვიტალი, ბერნშტეინი, ჰაუსდორფი, ლუზინი, სერპინსკი, კურატოვსკი, გიოდელი, ტარსკი, ნოვიკოვი, კოჰენი, სოლოვეი, შელახი და სხვები. (იხ. [1], [2], [3], [4], [5])

სიმრავლეთა თეორია ინტენსიური კვლევების შედეგად რამდენიმე მიმართულებით ვითარდებოდა. ამ მიმართულებებს შორის განსაკუთრებით უნდა გამოვყოთ შემდეგი ხუთი მიმართულება:

1. სიმრავლეთა აქსიომატური თეორია, რაც გულისხმობს აქსიომების ლოგიკურ ანალიზსა და სათანადო მოდელების აგების მეშვეობით სხვადასხვა ტიპის დამატებითი სიმრავლურ-თეორიული დებულებების თავსებადობის დადგენას;
2. წერტილოვან სიმრავლეთა თეორია, რომელიც ითვალისწინებს წერტილოვანი სიმრავლეების შინაგანი (ანუ დესკრიფციული) სტრუქტურის კვლევას მათემატიკური ანალიზის, ზომის თეორიისა და ზოგადი ტოპოლოგიის თვალსაზრისით;
3. ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეთა თეორია ორდინალურ (ანუ რიგობრივ) რიცხვთა თეორიის ჩათვლით;
4. უსასრულო სიმრავლეთა კომბინატორიკა, რომელიც სასრული და უსასრულო კარდინალური რიცხვებისთვის ავლენს კომბინატორული ხასიათის ღრმა კავშირებსა და დამოკიდებულებებს, ადგენს უსასრულო კარდინალების იერარქიის კანონზომიერებს და ა.შ.
5. სიმრავლურ-თეორიული მეთოდების გამოყენება მათემატიკის სხვადასხვა დარგში: მათემატიკურ ანალიზში, ტოპოლოგიაში, ალგებრაში, ლოგიკაში, ალბათობის თეორიაში და სხვა.

აღნიშნული ხუთივე მიმართულებით (რომლებიც ერთმანეთთან ორგანულად არიან დაკავშირებულები) აქტიურად მიმდინარეობს ღრმა მეცნიერული კვლევები და მიღებულია ძალზე მნიშვნელოვანი შედეგები (იხ. [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]).

დისერტაციის პირველ პარაგრაფში მოყვანილია სიმრავლეთა თეორიის სხვადასხვა აქსიომათა სისტემები, დაწვრილებით არის განხილული ZFC აქსიომათა სისტემა, რომელიც შედარებით პოპულარულია მათემატიკოსებში. ეს აქსომები მეტად ბუნებრივი დებულებებია და ადვილი მისაღებია ინტუიციისათვის, თუმცა მათში იმდენად ღრმა და მნიშვნელოვანი იდეებია თავმოყრილი, რომ ისინი მთელ თანამედროვე მათემატიკას დაედო საფუძვლად. ფაქტობრივად, მათემატიკის

თითოეული ცნება ზუსტად განისაზღვრება სიმრავლეთა თეორიაში აქსიომებზე დაყრდნობით და ყოველი მათემატიკურად ჭეშმარიტი დებულება შეიძლება განხილული იქნეს, როგორც სიმრავლეთა თეორიის თეორემა. სწორედ ეს აჩვენებს სიმრავლეთა თეორიის უნივერსალურობას და მისი გამოყენებების ეფექტურობას მათემატიკის სხვადასხვა დარგში.

ამრიგად, სიმრავლეთა თეორია აღებულია როგორც ბაზისი ყოველი საკვლევი მათემატიკური თეორიისა და მასზე დაყრდნობით მეტად ადვილი ხდება სხვა თეორიების აგება და შესწავლა. ეს შედეგი ფაქტიურად ეკუთვნის გიოდელს და მისივე თეორემა სისრულის შესახებ პირველი რიგის ლოგიკისათვის (იხ. [10], [11]) ცხადად აჩვენებს სიმრავლეთა თეორიის უნივერსალურობას აღნიშნული თვალსაზრისით. ე.ი. ყოველ არაწინააღმდეგობრივ მათემატიკურ თეორიას აქვს სიმრავლურ-თეორიული მოდელი. ხოლო ნ. ბურბაკი (იხ. [3]) საგანგებოდ ხაზს უსვამს იმას, რომ ძირითადი განსხვავება კლასიკურ და თანამედროვე მათემატიკას შორის სწორედ ის არის, რომ თანამედროვე მათემატიკაში აქცენტი გადატანილია არასრული თეორიების შესწავლაზე, რომლებსაც მრავალი მოდელი აქვთ. ბურბაკის მიერ წარმოდგენილ თეზისში (იხ. [1], [3]) შედარებულია კლასიკური და თანამედროვე მათემატიკური თეორიები, კერძოდ, განხილულია ცალსახა თეორიების მაგალითები. ცალსახა თეორია იკვლევს კონკრეტულ ობიექტებს, მაგალითად, ისეთებს როგორებიცაა: ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ევკლიდური სიბრტყე, უსასრულო განზომილებიანი სეპარაბელური ჰილბერტის სივრცე და სხვა. ბურბაკის თეზისის თანახმად, თანამედროვე მათემატიკის დამახიასეთებელი ნიშანი არის მრავალსახა თეორიების შესწავლა, ანუ იმ თეორიებისა, რომელთაც უამრავი არაიზომორფული მოდელი გააჩნიათ. ასეთი თეორიების მაგალითებია: ტოპოლოგია, ჯგუფთა თეორია, ველთა თეორია, ზომისა და ინტეგრალის თეორია და მრავალი სხვა.

მაგრამ ეს თეზისი თავის მხრივ დაზუსტებას მოითხოვს, რადგან გიოდელის თეორემის (არასისრულის შესახებ) თანახმად (იხ. [12]), პრინციპში ცალსახა თეორიები არც არსებობენ.

ამასთან დაკავშირებით აღსანიშნავია, რომ ფორმალურ არითმეტიკასაც კი აქვს არასტანდარტული მოდელები (იხ. [1], [4], [8], [13]), ამიტომ ბურბაკის ზემოაღნიშნული თეზისი არის ფარდობითი ხასიათის და მას აზრი აქვს მხოლოდ წინასწარ შერჩეული საბაზისო სიმრავლეთა თეორიის მიმართ. თუ ვიგულისხმებთ, რომ ამოსავალი სიმრავლეთა თეორია არის დაფიქსირებული, მაშინ ბურბაკის თეზისი ნამდვილად ასახავს თანამედროვე მათემატიკაში არსებულ რეალობას. ბურბაკის თეზისის ფარდობითობა სიმრავლეთა თეორიის თვალსაზრისით გარკვეული გაგებით ანალოგიურია ევკლიდური გეომეტრიის არაწინააღმეგობრიობის დედგენის. სახელდობრ, ევკლიდური გეომეტრიისთვის ვერასდროს ვერ ვაჩვენებთ ამ თეორიის აბსოლუტურად არაწინააღმდეგობრიობას, მაგრამ ვამტკიცებთ მის ფარდობით არაწინააღმდეგობრიობასა და ცალსახობას შესაბამისი არითმეტიკული მოდელის არსებობის საშუალებით (იხ. [1], [4], [8], [14], [15]).

ნაშრომის მეორე პარაგრაფი ეძღვნება ამორჩევის აქსიომას, რომელიც ესოდენ მნიშვნელოვან როლს თამაშობს მთელი თანამედროვე მათემატიკისათვის, კერძოდ კი მათემატიკური ანალიზის სხვადასხვა საკითხის შესწავლისას.

ამორჩევის აქსიომა (ანუ როგორც ხშირად ამბობენ, ცერმელოს აქსიომა) წარმოადგენს თანამედროვე მათემატიკის უმნიშვნელოვანეს პოსტულატს. სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატიკის აგების პროცესში ყველაზე ცხარე დებატები და მრავალრიცხოვანი დისკუსიები სწორედ ცერმელოს აქსიომის ირგვლივ გაიმართა მის პარადოქსალურ ლოგიკურ შედეგებთან დაკავშირებით (იხ. [4], [14], [15], [16], [17], [18], [19],). ეს აქსიომა გამოიყენება მათემატიკის უამრავ დარგში, განსაკუთრებით კი ისეთ მიმართულებებში, როგორიცაა სიმრავლეთა თეორია, მათემატიკური ლოგიკა, კლასიკური მათემატიკური ანალიზი, ფუნქციონალური ანალიზი, ტოპოლოგია, ზოგადი ალგებრა, ალბათობის თეორია, გრაფთა თეორია, უსასრულო კომბინატორიკა და ა.შ. (იხ. [4], [6], [8], [14], [15], [16], [17], [20]). როგორც წესი, ამორჩევის აქსიომას აღნიშნავენ ხოლმე AC სიმბოლოთი (Axiom of Choice). ღრმა ლოგიკური გამოკვლევების შედეგად დადგინდა, რომ ცერმელოს აქსიომას განსაკუთრებულად მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია თანამედროვე სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატიკაში.

მათემატიკის განვითარებაში დიდი მნიშვნელობა ენიჭება ამორჩევის აქსიომის არათვლად ფორმებს. სწორედ არათვლადი ფორმების საშუალებით იქნა ნაჩვენები ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლის არსებობა (იხ. [21], [22], [23]). ცერმელოს აქსიომის გარეშე შეიძლება ZF თეორიას ჰქონდეს უცნაური თვისებების მქონე მოდელები. მაგალითად, ს. ფეფერმენისა და ა. ლევის მიერ აგებული იქნა ZF-ის ისეთი მოდელი, რომელშიც **R** წარმოიდგინება როგორც თვლადი სიმრავლეების თვლადი გაერთიანება (იხ. [24]). თუ ჩვენ უგულვებელვყოფთ ამორჩევის აქსიომას და განვიხილავთ მხოლოდ ZF თეორიას, ამ თეორიის ფარგლებში მტკიცდება შემდეგი დებულების სამართლიანობა.

თეორემა 1. (ა) თუ შესაძლებელია **R** ნამდვილი ღერძის წარმოდგენა თვლადი სიმრავლეების თვლადი გაერთიანებით, მაშინ არც $\omega_1 \leq c$ უტოლობას და არც $\omega_1 \geq c$ უტოლობას არა აქვს ადგილი, ე.ი. ეს ორი კარდინალური რიცხვი ერთმანეთთან არასადარია

(ბ) თუ α არის ნებისმიერი ორდინალური რიცხვი, მაშინ $\omega_{\alpha+2}$ ვერ წარმოიდგინება

$$\omega_{\alpha+2} = \bigcup_{\xi<\omega_\alpha} X_\xi,$$

სახით, სადაც თითოეული X_ξ სიმრავლის სიმძლავრე ω_α-ს არ აღემატება. კერძოდ, შეუძლებელია ω_2 მეორე არათვლადი კარდინალური რიცხვის წარმოდგენა თვლადი სიმრავლეების თვლადი გაერთიანებით.

მესამე პარაგრაფი ეძღვნება წერტილოვან სიმრავლეებსა და მათ დესკრიფციულ სტრუქტურას. ეს თეორია XIX საუკუნის ბოლოს და XX საუკუნის დასაწყისში ჩამოყალიბდა. შემდგომში ნამდვილმნიშვნელობიან ფუნქციათა თეორიამ თვისებრივი ცვლილებები განიცადა და ეს მოხდა ძირითადად ფრანგული მათემატიკური სკოლის თვალსაჩინო წარმომადგენელთა – რ. ბერის (R. Baire), ე. ბორელის (E. Borel), ა. ლებეგის (H. Lebesgue), ა. დანჟუას (A. Denjoy) – შრომებში მიღებული შესანიშნავი შედეგების წყალობით. შემდეგ კი ამ თემატიკაში ჩაერთვნენ რუსული და პოლონური მათემატიკური სკოლების წამყვანი წარმომადგენლები.

მათი ინტენსიური კვლევების შედეგად წარმოიშვა მეტად მნიშვნელოვანი დარგი – სიმრავლეთა დესკრიფციული თეორია. მე-3 პარაგრაფში მოკლედ მიმოვიხილავთ სიმრავლეთა დესკრიფციული თეორიის ელემენტებს და განვიხილავთ $\mathbf{R}$ ღერძზე მდებარე უცნაური თვისებების მქონე წერტილოვან სიმრავლეებს. კერძოდ, ჩვენი ყურადღების ცენტრში არიან:

1. ვიტალის სიმრავლე – როგორც ცნობილია, ვიტალის სიმრავლე არის $\mathbf{R}/\boldsymbol{Q}$ ფაქტორ ჯგუფის ნებისმიერი სელექტორი. აღსანიშნავია, რომ ვიტალის სიმრავლეების რაოდენობა 2^c-ს ტოლია, სადაც c კონტინუუმის სიმძლავრეა
2. ჰამელის ბაზისი – 1905 წელს გ. ჰამელმა განიხილია $\mathbf{R}$, როგორც ვექტორული სივრცე $\mathbf{Q}$ რაციონალურ რიცხვთა ველზე და ააგო $\mathbf{R}$ წრფის ჰამელის ბაზისები.
3. ბერნშტეინის სიმრავლე - $\mathbf{R}$-ის X ქვესიმრავლეს ბერნშტეინის სიმრავლე ეწოდება, თუ არც X და არც მისი დამატება არ შეიცავს არც ერთ არაცარიელ სრულყოფილ სიმრავლეს.
4. ლუზინის სიმრავლე – ვიტყვით, რომ $X \subset \mathbf{R}$ სიმრავლე არის ლუზინის სიმრავლე, თუ X არის არათვლადი სიმრავლე და ყოველი პირველი კატეგორიის Y სიმრავლისთვის $\mathbf{R}$-დან, $X \cap Y$ სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.
5. სერპინსკის სიმრავლე – ვიტყვით, რომ $X \subset \mathbf{R}$ არის სერპინსკის სიმრავლე, თუ X არათვლადია და ყოველი ლებეგის აზრით ნულზომის $Y \subset \mathbf{R}$ სიმრავლისათვის, $X \cap Y$ სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია

ცნობილია ამ სიმრავლეების როლი და მნიშვნელობა მათემატიკის სხვადასხვა დარგებში (იხ. [4], [14], [25], [26], [27]). ეს სიმრავლეები არსებითად გამოიყენება ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის, ზომის თეორიისა და ზოგადი ტოპოლოგიის ბევრ საკითხში, განსაკუთრებით კი სხვადასხვა ტიპის კონტრმაგალითების აგების პროცესში. საზოგადოდ უნდა ითქვას, რომ მათემატიკური ანალიზის განვითარებამ გამოიწვია უფრო და უფრო რთული წერტილოვანი სიმრავლეების შესწავლის აუცილებლობა, კერძოდ, XIX საუკუნის ბოლოს ნამდვილი რიცხვის ცნების დაფუძნებამ დიდი სტიმული მისცა ამ მიმართულებით მრავალრიცხოვან კვლევებს. იმ დროისთვის აღმოჩენილი იქნა მათემატიკური ობიექტები, რომლებიც მაშინდელ სტანდარტულ მათემატიკურ ობიექტებთან დისონანსში მოდიოდა. ასეთ ცნობილ ობიექტთა რიცხვს მიეკუთვნება კანტორის მიერ აგებული შესანიშნავი სიმრავლე, ე.წ. კანტორის დისკონტინუუმი, რომელმაც უდიდესი როლი შეასრულა წერტილოვავანი სიმრავლების ზოგად თეორიაში. კანტორის დისკონტინუუმმა საფუძველი ჩაუყარა თანამედროვე ფრაქტალების თეორიასაც (იხ. [4], [27], [28]). მაგრამ გაცილებით უფრო რთული დესკრიფციული სტრუქტურის მქონე წერტილოვანი სიმრავლეები აგებულ იქნა დამატებითი სიმრავლურ-თეორიული აქსიომების დახმარებით.

ამავე პარაგრაგრაფში აღნიშნულია ჰამელის ბაზისის მნიშვნელობა თანამედროვე მათემატიკისთვის. სწორედ ჰამელის ბაზისების საშუალებით აიგება კოშის ფუნქციონალური განტოლების

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R})$$

ე.წ. არატრივიალური ამონახსნი და, უფრო მეტიც, მტკიცდება მრავალი ასეთი ამონახსნის არსებობა.

მესამე პარაგრაფში ნაჩვენებია ზომის თეორიისთვის საინტერესო ფაქტი ლებეგის ზომასთან მიმართებაში. კერძოდ, დამტკიცებულია თეორემა (იხ. [Beriash]).

თეორემა 2. თუ f არის ადიტიური ასახვა

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\,, \qquad f\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}^2,$$

რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლე შეიცავს ერთ წრფეზე არამდებარე 3 წერტილს, მაშინ f იძლევა კოშის ფუნქციონალური განტოლების არატრივიალურ ამონახსნს.

მიუხედავად იმისა, რომ ინტენსიური კვლევები მიმდინარეობს წერტილოვანი სიმრავლეების დესკრიფციულ თეორიაში და შესწავლილია მთელი რიგი პარადოქსალური წერტილოვანი სიმრავლეები (მაგალითად ვიტალის სიმრავლეები, ბერნშტეინის სიმრავლეები, ჰამელის ბაზისები), თითქმის არ იყო შესწავლილი მათ შორის ურთიერთკავშირები და მათი კომბინაციები. წინამდებარე ნაშრომში წარმოდგენილია რამოდენიმე დებულება, რომელიც მათ შორის ურთიერთდამოკიდებულებებს გამოხატავს.

თეორემა 3. (ა) არსებობს წერტილოვანი სიმრავლე, რომელიც ერთდროულად არის ვიტალის სიმრავლე და ბერნშტეინის სიმრავლეც;

(ბ) არსებობს ისეთი სიმრავლე, რომელიც ერთდროულად არის ბერნშტეინის სიმრავლე და ჰამელის ბაზისიც;

(გ) არ არსებობს ისეთი სიმრავლე $\mathbf{R}$-ში, რომელიც ერთდროულად შეიძლება იყოს ვიტალის სიმრავლე და ჰამელის ბაზისი.

მეოთხე პარაგრაფი ეძღვნება კონკრეტულ დამატებით-სიმრავლურ თეორიული აქსიომის, სახელდობრ, კონტინუუმის ჰიპოთეზის გამოყენებას წერტილოვანი სიმრავლეების შესწავლისას. როგორც ცნობილია, სწორედ კონტინუუმის ჰიპოთეზაზე დაყრდნობით აიგება ისეთი ცნობილი წერტილოვანი სიმრავლეები, როგორებიცაა ლუზინის სიმრავლე და სერპინსკის სიმრავლე (იხ. [25], [29], [30]). ლუზინის სიმრავლე და სერპინსკის სიმრავლე ზომის თვალზასრით უაღრესად საინტერესო ობიექტებს წარმოადგენენ. ლუზინის სიმრავლეები ზომის თეორიის თვალსაზრისით არიან ძალიან მცირე ობიექტები, რადგან ისინი აბსოლუტურად ნულზომის სიმრავლეებს წაროადგენენ ყოველი σ-სასრულო დიფუზიური ბორელის ზომის გასრულების მიმართ $\mathbf{R}$-ში. ხოლო სერპინსკის სიმრავლეები უაღრესად ცუდი სიმრავლეები არიან ლებეგის ზომის თეორიის თვლასაზრისით, რადგანაც სერპინსკის სიმრავლის ყოველი არათვლადი ქვესიმრავლე ლებეგის აზრით არაზომადია.

წინა პარაგრაფის მსგავსად, აღნიშნულ პარაგრაფშიც ვაგრძელებთ პარადოქსალურ წერტილოვან სიმრავლეთა ურთიერთკავშირების დადგენას. აქ მტკიცდება შემდეგი დებულებები.

თეორემა 4. კონტინუუმის ჰიპოთეზის დაშვებით არსებობს ისეთი X ლუზინის სიმრავლე $\mathbf{R}$ ღერძზე, რომ

$$X+X=\{x+x'\colon x\in X,\ x'\in X\}=\mathbf{R}.$$

თეორემა 5: (ა) არ არსებობს ლუზინის სიმრავლე, რომელიც იქნება ვიტალის სიმრავლე;

(ბ) არ არსებობს ლუზინის სიმრავლე, რომლიც იქნება ბერნშტეინის სიმრავლე;

(გ) კონტინუუმის ჰიპოთეზის დაშვებით არსებობს ისეთი ლუზინის სიმრავლე, რომელიც ამავდროულად არის ჰამელის ბაზისი.

თეორემა 6. კონტინუუმ ჰიპოთეზის დაშვებით, არსებობს ისეთი სერპინსკის სიმრავლე X, რომ

$$X + X = \{x + x';\ x \in X, x' \in X\} = \mathbf{R}.$$

თეორემა 7. (ა) არ შეიძლება, რომ სერპინსკის სიმრავლე იყოს ვიტალის სიმრავლე;

(ბ) არ შეიძლება, რომ სერპინსკის სიმრავლე იყოს ბერნშტეინის სიმრავლე;

(გ) არსებობს ისეთი სერპინსკის სიმრავლე, რომელიც ამავადროულად არის ჰამელის ბაზისი.

მეხუთე პარაგრაფში კი განვიხილავთ წერტილოვანი სიმრავლეების ისეთ მაგალითებს, რომელთა არსებობა და აგება კონტინუუმის ჰიპოთეზაზე უფრო სუსტ სიმრავლურ-თეორიულ დაშვებას ეყრდნობა, კერძოდ კი ე.წ. მარტინის აქსიომას მოითხოვს (მარტინის აქსიომის შესახებ იხ. [31], [26], [32], [8]).

სწორედ მარტინის აქსიომის დაშვებით აიგება პარადოქსალური და საინტერესო წერტილოვანი სიმრავლეები, სახელდობრ, ლუზინის განზოგადოებული სიმრავლე და სერპინსკის განზოგადოებული სიმრავლე.

თეორემა 8. (ა) არ არსებობს განზოგადოებული ლუზინის სიმრავლე, რომელიც არის ვიტალის სიმრავლე;

(ბ) არ არსებობს განზოგადოებული ლუზინის სიმრავლე, რომელიც არის ბენშტეინის სიმრავლე;

(გ) მარტინის აქსიომის დაშვებით არსებობს ისეთი განზოგადოებული ლუზინის სიმრავლე, რომელიც ამავდროულად არის ჰამელის ბაზისი.

თეორემა 9. (ა) არ არსებობს განზოგადოებული სერპინსკის სიმრავლე, რომელიც არის ვიტალის სიმრავლე;

(ბ) არ არსებობს განზოგადოებული სერპინსკის სიმრავლე, რომელიც არის ბერნშტეინის სიმრავლე;

(გ) არსებობს ისეთი განზოგადოებული სერპინსკის სიმრავლე, რომელიც ამავდროულად არის ჰამელის ბაზისი.

მე-6 პარაგრაფში მოყვანილი და განხილულია ისეთი ფაქტები და ცნებები, რომლებსაც შემდეგ პარაგრაფებში არსებითად ვიყენებთ. ესენია: ზომის თეორიის ზოგადი ცნებები, ინვარიანტული და კვაზი-ინვარიანტული ზომების თვისებები და ზომის გაგრძელების ამოცანა. დაწვრილებით არის განხილული ზომის გაგრძელების მარჩევსკის მეთოდი, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ოთხეული (E,G,S,μ), სადაც E არის ძირითადი საბაზისო სივრცე, G არის E საბაზისო სიმრავლის გარდაქმნათა რაიმე ჯგუფი, S არის E საბაზისო სივრცის ქვესიმრავლეთა რაიმე G-ინვარიანტული σ-ალგებრა, μ არის E-ზე განსაზღვრული რაიმე G-ინვარიანტული (G-კვაზი-ინვარიანტულია) σ-სასრული ზომა, ხოლო K არის ისეთი თვლადად ადიტიური G-ინვარიანტული იდეალი E სივრცის ბულეანში, რომ სამართლიანია

$$(\forall Y \in K)(\mu_*(Y) = 0)$$

ტოლობა. მაშინ არსებობს μ ზომის გაგრძელება $\bar{\mu}$ ისეთი, რომ

$$\bar{\mu}\left((Z \cup Z')\setminus Z''\right) = \mu(Z),$$

სადაც Z ნებისმიერი μ-ზომადი სიმრავლეა საბაზისო E სივრცეში, ხოლო Z' და Z'' არიან K იდეალის ნებისმიერი ელემენტები. ამასთანავე, თუ ამოსავალი μ ზომა G-ინვარიანტულია (G-კვაზი-ინვარიანტულია), მაშინ $\bar{\mu}$ ზომაც იქნება G-ინვარიანტული (G-კვაზი-ინვარიანტული).

ამავე პარაგრაფში გამოყოფილია ზომის გაგრძელების ამოცანის სამი ძირითადი ასპექტი:

1. სიმრავლურ-თეორიული ასპექტი - შეიძლება თუ არა არანულოვანი σ-სასრული დიფუზიური ზომა განისაზღვროს მოცემული არათვლადი სომრავლის ყველა ქვესიმრავლისათვის?
2. ალგებრული ასპექტი - თუ არათვლად G ჯგუფზე მოცემულია არანულოვანი, σ-სასრული, G-ს ყველა მარცხენა ტრანსლაციათა ჯგუფის მიმართ ინვარიანტული (კვაზი-ინვარიანტული) ზომა, შეიძლება თუ არა ეს ზომა მკაცრად გაგრძელდეს ინვარიანტულობის (კვაზი-ინვარიანტულობის) თვისების შენარჩუნებით?
3. ტოპოლოგიური ასპექტი - ტოპოლოგიურ სივრცეზე მოცემული რაიმე რეგულარობის თვისების მქონე ზომისათვის შესაძლებელია თუ არა მისი გაგრძელება სიმრავლეთა უფრო ფართო σ-ალგებრაზე, თანაც აღნიშნული რეგულარობის თვისების შენარჩუნებით?

მეშვიდე პარაგრაფში დასმულია კონრეტული პრობლემა, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: წინა პარაგრაფებში განხილულ პარადოქსალურ წერტილოვან სიმრავლეებზე (ვიტალის სიმრავლე, ბერნშტეინის სიმრავლე, ჰამელის ბაზისი, ლუზინის სიმრავლე და სერპინსკის სიმრავლე) რამდენად არის შესაძლებელი ლებეგის ზომის გაგრძელება?

დასმული ამოცანის გადაჭრაში დიდ როლს თამაშობს ზომის გაგრძელების მარჩევსკის მეთოდი. ამ მიმართულებით მიღებულია რამდენიმე შედეგი.

თეორემა 10. არსებობს $X \subset \mathbf{R}$ ბერნშტეინის სიმრავლე ისეთი, რომ:

(ა) არსებობს ინვარიანტული ზომა μ_1, რომელიც წარმოადგენს ლებეგის ზომის გაგრძელებას $\mathbf{R}$-ზე და $\mu_1(X) = 0$;

(ბ) არსებობს ინვარიანტული ზომა μ_2, რომელიც წარმოადგენს ლებეგის ზომის გაგრძელებას $\mathbf{R}$-ზე და $\mu_2(\mathbf{R}\backslash X) = 0$.

თეორემა 11. არსებობს $X \subset \mathbf{R}$ ბერნშტეინის სიმრავლე ისეთი, რომ თუ μ არის რაიმე σ-სასრულო ინვარიანტული ზომა $\mathbf{R}$-ზე, მაშინ იმავე $\mathbf{R}$-ზე არსებობს ინვარიანტული ზომა μ', რომლისთვისაც სრულდება შემდეგი პირობები:

(ა) μ' არის μ ზომის გაგრძელება;
(ბ) $X \in dom(\mu')$ და $\mu'(X) = 0$.

თეორემა 12. არსებობს ლებეგის ზომის ისეთი ინვარიანტული μ გაგრძელება, რომლის მიმართაც ყველა სერპინსკის სიმრავლე ზომადია და მათგან ყველას აქვს μ-ზომა ნული.

კარგად არის ცნობილი, რომ ზომის თეორიის ერთ-ერთი ფუნდამენტურ პრობლემას წარმოადგენს შემდეგი ამოცანა:
E საბაზისო სიმრავლეზე განსაზღვრული არანულოვანი ზომის გაგრძელება E სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაც შეიძლება ფართო კლასზე.

მერვე პარაგრაფში ჩვენს მიერ ნაჩვენებია, რომ უსასრულოგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეში, კერძოდ ნამდვილ რიცხვთა ყველა შესაძლო მიმდევრობების $\mathbf{R}^N$ სივრცეში არსებობს ამავე სივრცეში განსაზღვრული არანულოვანი σ-სასრულო ბორელის ინვარიანტული ზომის არასეპარაბელური ინვარიანტული გაგრძელება, რომელიც ინარჩუნებს ერთადერთობის თვისებას. უფრო მეტიც, აიგება საწყისი ზომის ინვარიანტული არასეპარაბელური გაგრძელებათა უდიდესი შესაძლო სიმძლავრის ოჯახი.

თეორემა 13. $\mathbf{R}^N$-ზე χ ბორელის $\sigma-$ სასრულო ზომის ინვარიანტულ, არასეპარაბელურ და ერთადერთობის თვისების მქონე ზომათა გაგრძელებების კლასის სიმძლავრე არის 2^{2^c}.

მეცხრე პარაგრაფი ეძღვნება ნამდვილმნიშვნელობიანი ფუნქციების ფარდობითად ზომადობის ცნებას ზომათა გარკვეული კლასების მიმართ. კერძოდ, ჩვენს მიერ გამოკვლეულ იქნა ნამდვილმნიშვნელობებიანი ფუნქციის ფარდობითად ზომადობის საკითხი სეპარაბელურ და არასეპარაბელურ ზომათა კლასების მიმართ და დამტკიცებულია შემდეგი ფაქტის სამართლიანობა.

თეორემა 14. თუ $f: E \to \mathbf{R}$ ფუნქცია არის ფარდობითად ზომადი M_2 კლასის მიმართ, მაშინ ის ასევე ფარდობითად ზომადი იქნება M_1 კლასის მიმართ, სადაც M_1-ით აღნიშნულია ყველა არანულოვან σ-სასრულო სეპარაბელურ ზომათა კლასი

E-ზე, ხოლო M_2-ით აღნიშნულია ყველა არანულოვან σ-სასრულო არასეპარაბელურ ზომათა კლასი E-ზე.

§1. სიმრავლეთა თეორიის სხვადასხვა აქსიომატური სისტემების შესახებ

ნებისმიერი მათემატიკური თეორია აგებულია მოცემულ საწყის დებულებებზე ანუ აქსიომებზე დაყრდნობით, ე.ი. წინადადებებზე, რომლებსაც დამტკიცების გარეშე ვღებულობთ, როგორც ჭეშმარიტ დებულებებს. ყველა დანარჩენი დებულელება უნდა იყოს ამ აქსომების თანმიმდევრობით გამოყენებისა და გარკვეული გამოყვანის წესების შედეგად დამტკიცებული. როდესაც თეორიაში უკვე ცალსახად (ცხადად) არის ჩამოყალიბებული აქსიომები, მისი ჩამოყალიბების ბოლო ეტაპს წარმოადგენს დამტკიცების წესები (იხ., მაგალითად, [1] ,[2], [3], [4], [9], [13],[14],[17])

განსაზღვრება: თეორიას ეწოდება სრული, თუ ნებისმიერი ჩაკეტილი A ფორმულისათვის ამ თეორიაში დამტკიცებადია ან ფორმულა A ან ამ ფორმულის უარყოფა $\neg A$.

არ არის აუცილებელი, რომ აგებული თეორია იყოს სრული, რადგან თანამედროვე მათემატიკაში არსებობს მრავალი თეორია, რომელიც სულაც არ არის სრული.

სრული თეორიის ყველაზე ნათელ მაგალითს წარმოადგენს პროპოზიციული აღრიცხვა, ხოლო არასრული თეორიების რიცხვს მიეკუთვნებიან:

(ა) დალაგების მიმართების თეორია,

(ბ) ჯგუფთა თეორია,

(გ) რგოლთა თეორია,

(დ) ვექტორულ სივრცეთა თეორია,

(ე) ტოპოლოგია

და ა.შ., რადგან თითოეულს ამ თეორიებიდან არსებითად განსხვავებული (არაიზომორფული) მოდელები გააჩნიათ.

პირველი რიგის თეორიის გავრცელებული მაგალითია ჯგუფთა თეორია, რომელსაც K ასოთი აღვნიშნავთ.

ვთქვათ, K-ს აქვს ერთი პრედიკატული სიმბოლო A_1^2, ერთი ფუნქციონალური სიმბოლო f_1^2 და ერთი საგნობრივი მუდმივი a_1. შემოვიტანოთ აღნიშვნები: ნაცვლად $A_1^2\,(t,s)$ ჩვენ ჩავწერთ $t = s$, $f_1^2(t,s)$ ნაცვლად $t+s$ და a_1-ს ნაცვლად 0.

K თეორიის საკუთრივი აქსიომები არიან შემდეგი ფორმულები:

1. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3)$ (ასოციაციურობა);
2. $\forall x_1 (0 + x_1 = x_1)$;
3. $\forall x_1 \exists x_2 (x_2 + x_1 = 0)$ (შებრუნებული ელემენტის არსებობა);
4. $\forall x_1 (x_1 = x_1)$ (ტოლობის რეფლექსურობა);

5. $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2 \Rightarrow x_2 = x_1)$ (ტოლობის სიმეტრიულობა);
6. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 = x_2 \Rightarrow (x_2 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_3))$ (ტოლობის ტრანზიტულობა);
7. $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3$ ($x_2 = x_3 \Rightarrow$ ($x_1 + x_2 = x_1 + x_3$ და $x_2 + x_1 = x_3 + x_1$) (ტოლობის ჩასმადობა).

ამ თეორიის ყოველ მოდელს ეწოდება ჯგუფი.

ჯგუფთა თეორია არის სასრულად აქსიომატიზირებული. საზოგადოდ ყოველი თეორია, რომელსაც გააჩნია საკუთრივი აქსიომების სასრული რიცხვი, არის ეფექტურად აქსიომატიზირებული, რადგან არსებობს შესაძლებლობა, რომ ნებისმიერი მოცემული ფორმულისათვის ეფექტურად (კონსტრუქციულად) გადაწყდეს საკითხი, ეკუთვნის თუ არა ეს ფორმულა თეორიის აქსიომათა რიცხვს.

ნ. ბურბაკი (იხ. [3]) საგანგებოდ ხაზს უსვამს იმას, რომ ძირითადი განსხავება კლასიკურ და თანამედროვე მათემატიკას შორის სწორედ ის არის, რომ აქცენტი თანამედროვე მათემატიკაში გადატანილია არასრული თეორიების შესწავლაზე, რომლებსაც მრავალი არსებითად განსხვავებული მოდელი აქვთ.

თანამედროვე მათემატიკის შესწავლასა და კვლევაში დიდ როლს თამაშობს სიმრავლეთა თეორია. სიმრავლეთა თეორია აღებულია როგორც ბაზისი ყოველი საკვლევი მათემატიკური თეორიისა და მასზე დაყრდნობით ხდება სხვა თეორიების აგება, შესწავლა და მათი შემდგომი განვითარება. ეს მნიშვნელოვანი გარემოება ფაქტიურად კ. გიოდელის ფუნდამენტურ შედეგს უკავშირდება (იხ. [10], [11]). მისივე თეორემა სისრულის შესახებ პირველი რიგის ლოგიკისათვის ცხადად აჩვენებს სიმრავლეთა თეორიის უნივერსალურობას აღნიშნული თვალსაზრისით, ე.ი. ყოველ არაწინააღმდეგობრივ მათემატიკურ თეორიას აქვს სიმრავლურ-თეორიული მოდელი.

სიმრავლეთა აქსიომატური თეორია გულისხმობს ამოსავალი აქსიომების ლოგიკურ ანალიზს და, კერძოდ, სათანადო მოდელების აგების მეშვეობით სხვადასხვა ტიპის დამატებითი სიმრავლურ-თეორიული დებულებების (ანუ ჰიპოთეზების) თავსებადობის დადგენას (მაგალითად, ამორჩევის აქსიომისა და კონტინუუმის ჰიპოთეზის თავსებადობის დადგენას, რაც თავის დროზე ნაჩვენები იყო იმავე გიოდელის მიერ (იხ. [10], [4], [8],[32]).

საზოგადოდ, აქსიომატური ანუ ფორმალური თეორია შეგვიძლია შემდგეგნაირად განვსაზღვროთ:

ვიტყვით, რომ ფორმალური ანუ აქსიომატური თეორია J განსაზღვრულია, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1. მოცემულია სიმბოლოთა რაიმე თვლადი სიმრავლე, რომელებსაც J თეორიის სიმბოლოები ეწოდება. *J* თეორიის სიმბოლოთა სასრულ მიმდევრობას ეწოდება J თეორიის გამოსახულება;
2. არსებობს J თეოორიის გამოსახულებათა ქვესიმრავლე, რომელებსაც ეწოდება თეორიის ფორმულები. ჩვეულებრივ არსებობს ეფექტური პროცედურა, რომელიც საშუალებას იძლევა მოცემული გამოსახულებისთვის განისაზღვროს, არის თუ არა ის ფორმულა;
3. გამოყოფილია ფორმულათა გარკვეული სიმრავლე, რომელებსაც *J* თეორიის აქსიომები ეწოდებათ; იმ შემთხვევაში, თუ შესაძლებელია რაიმე

კონსტუქციული მეთოდით იმის გარკვევა, მოცემული ფორმულა წარმოადგენს თუ არა თეორიის აქსიომას, ვამბობთ რომ მოცემული თეორია არის ეფექტურად აქსიომატიზირებული (ანუ არის აქსიომატური თეორია);

4. არსებობს ფორმულათა შორის მიმართებათა სასრული სიმრავლე $R_1, \ldots, R_n$, რომლებსაც გამოყვანის წესები ეწოდება. ყოველი R_i-სთვის არსებობს ცალსახად განსაზღვრული ნატურალური რიცხვი $j = j(i)$ ისეთი, რომ ყოველი j რაოდენობა ფორმულებისაგან შედგენილი სიმრავლისათვის და ყოველი A ფორმულისათვის ეფექტურად (კონსტრუქციულად) წყდება საკითხი იმის შესახებ, არის თუ არა მოცემული j რაოდენობის ფორმულები R_i მიმართებაში A ფორმულასთან, და თუ არის, მაშინ A-ს ეწოდება მოცემულ j რაოდენობის ფორმულათა უშუალო შედეგი R_i წესის გამოყენებით.

არსებობენ სიმრავლეთა თეორიის სხვადასხვა ტიპის აქსიომატიზაციები.

პირველ რიგში განვიხილოთ ცერმელო-ფრენკელის ფორმალური სისტემის (ანუ ZFC სისტემის) აქსიომათა ერთ-ერთი ვარიანტი, რომელიც ყველაზე პოპულარულია მიღებულ აქსიომატიკებს შორის. სიმრავლეთა თეორია არის პირველი რიგის ლოგიკური თეორია, რომლის ალფაბეტში გვაქვს ორი ორადგილიანი რეალიციური ნიშანი: = (ტოლობა) და $\in$ (კუთვნილება).

1. ექსტენსიონალობის აქსიომა:

$$(\forall x)(\forall y)\big((\forall z)(z\in x \Leftrightarrow z\in y)\Rightarrow(x = y)\big).$$

ეს აქსიომა გვეუბნება, რომ ნებისმიერი სიმრავლე ცალსახად განისაზღვრება მისი ყველა ელემენტის საშუალებით.

2. ცარიელი სომრავლის არსებობის აქსიომა:

$(\exists x)(\forall y)(y \notin x)$.

ამ აქსიომის თანახმად, არსებობს სიმრავლე, რომელიც არც ერთ ელემენტს არ შეიცავს. შევნიშნოთ, რომ ექსტენსიონალობის აქსიომის გამო, ასეთი სიმრავლე ერთადერთია. მას ცარიელი სიმრავლე ეწოდება და იგი $\varnothing$ სიმბოლოთი აღინიშნება.

3. სიმრავლის ბულეანის არსებობის აქსიომა:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y \Leftrightarrow z \subset x).$$

ეს აქსიომა გვეუბნება, რომ ყოველი x სიმრავლისთვის არსებობს მისი ყველა შესაძლო ნაწილთა სიმრავლე. ამ სიმრავლეს x-ის ბულეანი ჰქვია და იგი P(x) სიმბოლოთი აღინიშნება.

4. სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახის გაერთიანების აქსიომა:

$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y \Leftrightarrow (\exists t)(t\in x \,\&\, z\in t))$.

ეს აქსიომა ფაქტობრივად გვეუბნება, რომ სიმრავლეთა ნებისმიერი $\{E_i : i \in I\}$ ოჯახისთვის არსებობს $\cup\{E_i : i \in I\}$ სიმრავლე, რომელიც შეიცავს იმ და მხოლოდ იმ ელემენტებს, რომლებიც ოჯახის ერთ E_i სიმრავლეს მაინც ეკუთვნიან.

5. უსასრულო სიმრავლის არსებობის აქსიომა:

$$(\exists X)(\varnothing \in X \& (\forall x)(x \in X \Rightarrow (\exists y)(y \in X \& (\forall z)(z \in y \Leftrightarrow (z \in x \vee z = x))))).$$

ამ აქსიომის ერთ-ერთ ეკვივალენტურ ფორმას მივიღებთ, თუ ყველა ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლის არსებობის აქსიომას დავუშვებთ.

ცხადია, თავიდანვე შეგვეძლო მეორე აქსიომა ჩაგვერთო უსასრულო სიმრავლის არსებობის აქსიომის ჩამოყალიბებაში. სახელდობრ, ახლახან მოყვანილ ფორმულირებაში $\varnothing \in X$ დამოკიდებულების მაგივრად შეგვეძლო დაგვეწერა $(\exists t)(t \in X \& (\forall u)(u \notin t))$ დამოკიდებულება. მაგრამ ამ ორ აქსიომებს (2 და 5) ტრადიციულად ცალ-ცალკე აყალიბებენ.

6. ამორჩევის აქსიომა (ცერმელოს აქსიომა):

არაცარიელ სიმრავლეთა ყოველი $\{E_i : i \in I\}$ ოჯახისთვის არსებობს ამ ოჯახის სელექტორი, ე.ი თუ $(\forall i \in I)(E_i \neq \varnothing)$, მაშინ არსებობს $\{e_i : i \in I\}$ ელემენტთა ისეთი ოჯახი, რომ $(\forall i \in I)(e_i \in E_i)$.

7. ჩანაცვლების აქსიომა:

ვთქვათ, მოცემული $S(x, y)$ ბინარული მიმართება ფუნქციონალურია y საგნობრივი ცვლადის მიმართ, ე.ი. ყოველი x ელემენტისთვის არსებობს ერთადერთი y ელემენტი, რომლისთვისაც $S(x,y)$ ჭეშმარიტია (ეს გამონათქვამი ფორმულის სახით შემდეგნარიად ჩაიწერება $(\forall x)(\exists! y)S(x, y)$) . მაშინ, ნებისმიერი X სიმრავლისთვის არსებობს Y სიმრავლე ისეთი, რომ

$$(\forall y)(y \in Y \Leftrightarrow (\exists x)(x \in X \& S(x, y))).$$

სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატიკის აგების პროცესში ყველაზე ცხარე დებატები და მრავალრიცხოვანი დისკუსიები გაიმართა ცერმელოს აქსიომის ირგვლივ და მის პარადოქსალურ ლოგიკურ შედეგებთან დაკავშირებით (იხ. მაგალითად [16], [4], [14], [18], [19], [33], [15], [20]).

ბურბაკისეული მიდგომით (იხ. [3]), სიმრვალეთა თეორია არის ეგალიტარული თეორიის გარკვეული გაფართოება, რომელიც მიიღება ერთადერთი სიმბოლოს, კუთვნილების ნიშნის ($\in$) დამატებით და სათანადო აქსიომების შემოტანით. სისრულისათვის აქვე მოვიყვანთ ტოლობის ნიშანთან დაკავშირებულ აქსიომებს, რომლებითაც ხასიათდებიან ეგალიტარული თეორიები. მაგრამ ამისათვის ჯერ აუცილებელად უნდა გავიხსენოთ ლოგიკური და კვანტორული თეორიების ცნებები.

როგორც ვიცით, ნებისმიერი ფორმალური მათემატიკური თეორია შეიცავს ამოსავალ ლოგიკურ ნიშნებს, მაგალითად, $\neg$ (უარყოფას) და $\vee$ (დიზიუნქციას) ან კიდევ $\neg$ (უარყოფას) და $\wedge$ (კონიუნქციას). სხვა ტიპის ლოგიკური ნიშნები, მაგალითად, $\Rightarrow$ (იმპლიკაცია) და $\Leftrightarrow$ (ექვივალენტობა) განისაზღვრებიან ამოსავალი

ლოგიკური ნიშნების ტერმინებში და, ფაქტობრივად, თამაშობენ ე.წ. შემამოკლებელი სიმბოლოების როლს (მაგალითად, $S \Rightarrow T$ ფორმულა წარმოადგენს $(\neg S) \vee T$ ფორმულის უბრალო შემოკლებას).

ფორმალურ მათემატიკურ თეორიას ლოგიკური თეორია ეწოდება, თუ მასში გვაქვს შემდეგი ოთხი სქემა:

1. $(S \vee S) \Rightarrow S$,
2. $S \Rightarrow (S \vee T)$,
3. $(S \vee T) \Rightarrow (T \vee S)$,
4. $(S \Rightarrow T) \Rightarrow ((R \vee S) \Rightarrow (R \vee T))$,

სადაც S, T და R თეორიის ნებისმიერი ფორმულებია.

ამოწერილი სქემები განსაზღვრავენ ლოგიკის ფუნდამენტალურ კანონებს და თავისთავად წარმოადგენენ კლასიკური პროპოზიციული აღრიცხვის აქსიომათა ნუსხის ერთ-ერთ ვარიანტს, რომელიც ჯერ კიდევ დ. ჰილბერტის მიერ იყო შემოთავაზებული (იხ. [1],[3], [4] ,[13]).

ლოგიკურ თეორიებში გვაქვს შემდეგი გამოყვანის წესი, რომელსაც მოდუს პონენსი (*modus ponens*) ჰქვია:

თუ S და $S \Rightarrow R$, მაშინ R.

ლოგიკურ თეორიას კვანტორული თეორია ეწოდება, თუ მის ალფაბეტში მონაწილეობს $\forall$ ზოგადობის კვანტორის ნიშანი და მასთან დაკავშირებით შემოტანილია აქსიომათა შემდეგი სქემა:

$$(\forall x)S(x) \Rightarrow S(y),$$

სადაც $S(z)$ არის ჩვენი თეორიის ნებისმიერი ფორმულა (z საგნობრივ ცვლადზე დამოკიდებული).

შესაბამისი გამოყვანის წესი შემდეგნაირად ყალიბდება ($\forall$-წესი) :

თუ $S \Rightarrow R(x)$, სადაც S ფორმულა არ შეიცავს x საგნობრვ ცვლადს, მაშინ $S \Rightarrow (\forall x)R(x)$.

არსებობის კვანტორის ნიშანი ე.ი. $\exists$ სიმბოლო განსახილავ თეორიაში შემოტანილი შეიძლება იქნას $\forall$ ზოგადობის კვანტორის მეშვეობით, სახელდობრ, განსაზღვრის თანახმად, $(\exists x)T(x)$ ფორმულა წარმოადგენს მხოლოდ და მხოლოდ შემამოკლებელ აღნიშვნას $\neg(\forall x)\neg T(x)$ ფორმულისათვის.

პირუკუ, კვანტორული თეორია შეიძლება განიმარტოს $\exists$ არსებობის კვანტორის ნიშნის და მისი შესაბამისი აქსიომისა და გამოყვანის წესის ტერმინებში. ამ შემთხვევაში გვაქვს აქსიომათა შემდეგი სქემა:

$$S(y) \Rightarrow (\exists x)S(x),$$

სადაც $S(z)$ არის ჩვენი თეორიის ნებისმიერი ფორმულა (z საგნობრივ ცვლადზე დამოკიდებული).

გარდა ამისა, გვაქვს შემდეგი გამოყვანის წესიც, რომელსაც ∃-წესი ეწოდება:

თუ $S(x) \Rightarrow R$, სადაც R ფორმულა არ შეიცავს x საგნობრივ ცვლადს, მაშინ $(\exists x)S(x) \Rightarrow R$.

ასეთი მიდგომის დროს ზოგადობის კვანტორი შემოაქვთ არსებობის კვანტორის მეშვეობით და $(\forall x)T(x)$ ფორმულა არის მხოლოდ და მხოლოდ შემამოკლებელი აღნიშვნა $\neg(\exists x)\neg T(x)$ ფორმულისათვის.

ამრიგად, ჩვენ ვხედავთ, რომ ზოგადობისა და არსებობის კვანტორები გარკვეული გაგებით ერთმანეთის მიმართ დუალურ (ორადულ) ობიექტებს წარმოადგენენ.

ახლა უკვე შეგვიძლია განვიხილოთ ეგალიტარული თეორიები.

კვანტორულ თეორიას ეგალიტარული თეორია ეწოდება, თუ მის ალფაბეტში მონაწილეობს ორადგილიანი რელაციური (პრედიკატული) ნიშანი = და ამ ნიშანთან დაკავშირებით შემოტანილია შემდეგი ორი აქსიომა (ფაქტობრივად, აქსიომათა სქემები).

პირველი აქსიომა:

$$x = x$$

სადაც x ნებისმიერი საგნობრივი ცვლადია.

მეორე აქსიომა:

$$(x \ = \ y) \Rightarrow (S(x) \Rightarrow S(y)),$$

სადაც x და y ნებისმიერი ერთმანეთისგან განსხვავებული საგნობრივი ცვლადებია, ხოლო $S(z)$ – თეორიის ნებისმიერი ფორმულა (მესამე z თავისუფალ საგნობრივ ცვლადზე დამოკიდებული და, შესაძლოა, სხვა თავისუფალი საგნობრივი ცვლადების შემცველი).

მოყვანილი აქსიომების ინტუიციური შინაარსი სავსებით გასაგებია. პირველი აქსიომა ამბობს, რომ ყოველი ობიექტი თავისი თავის ტოლია, ხოლო მეორე აქსიომა გვეუბნება, რომ ტოლი ობიექტები ერთმანეთის მიმართ ჩანაცვლებადია.

ამ აქსიომებიდან ადვილად მიიღება ტოლობის ყველა ბუნებრივი თვისება (მაგალითად, ის ცნობილი ფაქტი, რომ ტოლობას აქვს რეფლექსურობის, სიმეტრიულობისა და ტრანზიტულობის თვისებები). გარდა ამისა, გვაქვს იმპლიკაცია

$$(x \ = \ y) \Rightarrow (t(x) \ = t(y)),$$

სადაც x და y ერთმანეთისაგან განსხვავებული საგნობრივი ცვლადებია, ხოლო $t(z)$ – თეორიის ნებისმიერი ტერმი (მესამე z თავისუფალ საგნობრივ ცვლადზე დამოკიდებული).

როგორც უკვე ვთქვით, სიმრავლეთა თეორია ეგალიტარული თეორიის შემდგომი გაფართოებაა. მას კუთვნილების ორადგილიანი რელაციური $\in$ ნიშანი შემოაქვს და, გარკვეული აქსიომების მეშვეობით, $\in$ და $=$ ნიშნებს ერთმანეთს უკავშირებს. (იხ. [1], [4] , [8], [13], [17], [32])

ბურბაკის მიერ წარმოდგენილ თეზისში (იხ. [3]) შედარებულია კლასიკური და თანამედროვე მათემატიკური თეორები, კერძოდ განხილულია ცალსახა თეორიების მაგალითები. ცალსახა თეორია იკვლევს კონკრეტულ ობიექტებს, მაგალითად, ისეთებს როგორებიცაა: ევკლიდური სიბრტყე, ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, უსასრულოგანზომილებიანი სეპარაბელური ჰილბერტის სივრცე, [0,1] ინტერვალზე განსაზღვრულ ყველა ნამდვილმნიშვნელობიან უწყვეტ ფუნქციათა სივრცე და სხვა.

ბურბაკის თეზისის თანახმად, თანამედროვე მათემატიკის დამახიასეთებელი ნიშანი არის მრავალსახა თეორიების შესწავლა, ანუ იმ თეორიებისა, რომელთაც უამრავი არაიზომორფული მოდელი გააჩნიათ. ასეთი თეორიების მაგალითებია: ტოპოლოგია, ჯგუფთა თეორია, ველთა თეორია და სხვა.

მაგრამ ეს თეზისი თავის მხრივ დაზუსტებას მოითხოვს, რადგან გიოდელის თეორემის (არასისრულის შესახებ) თანახმად (იხ. [13]), საკმარისად მდიდარი ცალსახა თეორიები არც არსებობენ.

გარდა ამისა, გიოდელის მეორე თეორემამ არასისრულის შესახებ ფაქტიურად გარდატეხა მოახდინა თანამედროვე მათემატიკაში. ეს თეორემა შემდეგნაირად ყალიბდება:

თეორემა (გიოდელი). თუ მოცემული თეორიის ყველა ჭეშმარიტ წინადადებათა U ერთობლიობა არ არის რეკურსულად გადათვლადი, მაშინ ამ თეორიისთვის არსებობს ჭეშმარიტი წინადადება, რომელიც არ არის დამტკიცებადი (ანუ არ არის თეორემა).

აქ ჭეშმარიტობის ცნება მოისაზრება ძალიან ფართო გაგებით (მაგალითად, ჩაკეტილი ფორმულის ჭეშმარიტობა შეგვიძლია გავაიგივოთ მის შესრულებადობასთან რაიმე სტანდარტულ მოდელში ან მოდელთა გარკვეულ კლასში). ამასთან ერთად, ნებისმიერი ფორმალური თეორიისათვის ბუნებრივია მოვითხოვოთ, რომ დამტკიცებადი ფორმულები იყვნენ ჭეშმარიტი.

აღსანიშნავია, რომ ფორმალურ არითმეტიკასაც კი აქვს არასტანდარტული მოდელები, ამიტომ ბურბაკის ზემოაღნიშნული თეზისი არის ფარდობითი ხასიათის და მას აზრი აქვს მხოლოდ წინასწარ შერჩეული საბაზისო სიმრავლეთა თეორიის მიმართ. თუ ვიგულისხმებთ, რომ ამოსავალი სიმრავლეთა თეორია არის ცალსახად დაფიქსირებული, მაშინ ბურბაკის თეზისი ნამდვილად ასახავს თანამედროვე მათემატიკაში არსებულ რეალობას.

ბურბაკის თეზისის ფარდობითობა სიმრავლეთა თეორიის თვალსაზრისით გარკვეული გაგებით ანალოგიურია ევკლიდური გეომეტრიის არაწინააღმეგობრიობის დამტკიცებისა. ევკლიდურ გეომეტრიაში ვერასდროს ვერ ვაჩვენებთ ამ თეორიის აბსოლუტურად არაწინააღმდეგობრიობას, მაგრამ ვამტკიცებთ მის ფარდობით არაწინააღმდეგობრიობას შესაბამისი არითმეტიკული მოდელის არსებობის საშუალებით.

სიმრავლეთა თეორიის ერთ-ერთი ცნობილი აქსიომატური სისტემა არის ე.წ. ნეიმან-ბერნაის-გიოდელის სისტემა, ანუ NBG სისტემა (იხ. [13],[14],[34],). ამ სისტემაში ტოლობის გარდა ჩვენ გვაქვს მხოლოდ ერთი პრედიკატული სიმბოლო A_2^2 და არ გვაქვს არც ერთი ფუნქციონალური სიმბოლო და საგნობრივი მუდმივა. პრედიკატული სიმბოლო შეგვიძლია შემდეგნაირად შევცვალოთ შემამოკლებელი სიმბოლოებით:

$$A_2^2(X,Y) \Leftrightarrow X \in Y,$$

$$\neg A_2^2(X,Y) \Leftrightarrow X \notin Y.$$

ამ სისტემის აქსიომების ჩამოყალიბებისას საუბარია კლასებზე და არა სიმრავლეებზე. კლასის ცნების შემოტანა მათემატიკაში უშუალოდ უკავშირდება რასელის პარადოქსს, რომელსაც იგი 1902 წელს წააწყდა. რაში მდგომარეობს ეს პარადოქსი? სიმრავლის ინტუიციური ანუ კანტორისეული განსაზღვრის თანახმად, სიმრავლე არის რაიმე ობიექტთა ერთობლიობა, რომლებიც გარკვეულ თვისებას აკმაყოფილებენ. განვიხილოთ სიმრავლე, განსაზღვრული შემდეგნაირად:

$$A = \{X : X \notin X\}.$$

ამ A სიმრავლის განსაზღვრის თანახმად, თუ $A \in A$, მაშინ $A \notin A$ და თუ $A \notin A$, მაშინ $A \in A$. მივედით აშკარა წინააღმდეგობამდე, ანუ ნებისმიერ შემთხვევაში A არის A-ს ელემენტიც და თან არც არის. ეს გარემოება გვიჩვენებს, რომ სიმრავლის ინტუიციური კანტორისეული განსაზღვრება არსებით დაზუსტებას მოითხოვს (იხ. [1], [2], [3], [4], [9], [13],[14]).

აღნიშნული გარემოების გამო, NBG თეორიის ობიექტები არიან ორგვარი – სიმრავლეები და კლასები, ხოლო თეორიის აქსიომებს წარმოადგენენ შემდეგი წინადადებები:

1. ვთქვათ, $A = B$ და $R(X)$ კლასის რაიმე თვისებაა. $R(A)$ სამართლიანია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ჭეშამრიტია $R(B)$.

მაგალითად, თუ $A = B$, მაშინ $A \in C$ იმ და მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $B \in C$.

2. თუ $R(X)$ რაიმე თვისებაა, მაშინ არსეობობს კლასი ყველა ისეთი ელემენტებისა, რომლებიც წარმოადგენენ მხოლოდ და მხოლოდ იმ X სიმრავლეებს, რომლებისთვისაც სამართლიანია $R(X)$.

ანუ განსაზღვრული გვაქვს კლასი $\{X : R(X)\}$ ისე რომ, ყოველი A სიმრავლისთვის $A \in \{X : R(X)\}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $R(A)$ ჭეშმარიტია.

3. $\varnothing = \{X : X \neq X\}$ არის სიმრავლე.
4. სიმრავლის ყოველი ქვეკლასი არის სიმრავლე.
5. თუ A და B სიმრავლეებია, მაშინ $\{A, B\}$ აგრეთვე სიმრავლეა.
6. თუ A სიმრავლეა, მაშინ მისი ბულეანი $P(A)$ (ანუ A-ს ყველა ქვესიმრავლეთა კლასი აგრეთვე სიმრავლეა).

7. თუ A სიმრავლეა, მაშინ მისი გაერთიანებაც სიმრავლეა, რომელიც ასე აღინიშნება: $\cup$A.
8. თუ F არის ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არე არის სიმრავლე, მაშიმ მისი მნიშვნელობათა კლასიც იქნება სიმრავლე.
9. ყოველი სიმრავლე წარმოადგენს რომელიმე უნივერსალური სიმრავლის ელემენტს (უნივერსალური სიმრავლის შესახებ იხ. ქვემოთ).
10. ყოველი არაცარიელი კლასი A შეიცავს ელემენტს X-ს, რომელიც არ იკვეთება A-სთან.

განვიხილოთ ჩამოთვლილი აქსიომების რამდენიმე შედეგი:

თუ A და B სიმრავლეებია, მაშინ დალაგებული წყვილი $(A,B)=\{\{A\},\{A,B\}\}$ ასევე სიმრავლეა და თუ სხვა (A',B') დალაგებული წყვილიც ასევე სიმრავლეა, მაშინ $(A,B)=(A',B')$ ტოლობა ექვივალენტურია ორი $A=A'$ და $B=B'$ ტოლობის.

თუ $R(X)$ არის რაიმე თვისება, ხოლო A - რაიმე სიმრავლე, მაშინ $\{X : X\in A \,\&\, R(X)\}$ არის A-ს ქვესიმრავლე, რაც მე-4 აქსიომიდან გამომდინარეობს.

თუ A და B სიმრავლეებია, მაშინ მათი დეკარტული ნამრავლი $A\times B$ ასევე იქნება სიმრავლე. ცხადია, თუ $X\in A$ და $Y\in B$, მაშინ $\{X\},\{X,Y\}\subseteq A\cup B$, აქედან კი $\{X\},\{X,Y\}\in P(A\cup B)$, ასე რომ $(X,Y)\in P(P(A\cup B))$. მიტომ

$$A\times B=\{Z\in P(P(A\cup B)) : (\exists X)(\exists Y)(Z=(X,Y), X\in A, Y\in B)\},$$

აქედან ცხადად ჩანს რომ $A\times B$ ასევე სიმრავლეა.

ყოველი ფუნქცია, რომლის განსაზღვრის არე არის სიმრავლე, თავადაც წარმოადგენს სიმრავლეს. მართლაც ვთქვათ, გვაქვს რაიმე F ფუნქცია, ხოლო A იყოს სიმრავლე, რომელიც წარმოადგენს მისი განსაზღვრის არეს. მე-8 აქსიომის თანახმად, მისი მნიშვნელობათა კლასი ასევე სიმრავლეა და აღვნიშნოთ იგი B-თი. რადგან $F\subseteq A\times B$, აქედან გამომდინარეობს, რონ F არის სიმრავლე.

განსაზღვრა: არაცარიელ U სიმრავლეს ეწოდება უნივერსლური სიმრავლე, თუ იგი აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

(1) თუ $X\in U$, მაშინ $X\subseteq U$ (ტრანზიტულობის პირობა).
(2) თუ $X\in U$, მაშინ $P(X)\in U$.
(3) თუ $X,Y\in U$, მაშინ $\{X,Y\}\in U$.
(4) თუ $F=(F_i)_{i\in I}$, სადაც $F_i\in U$ და $I\in U$, მაშინ $\bigcup F\in U$.

უნივესალური სიმრავლის არსებობის აქსიომა ჩაანაცვლებს უსასრულო სიმრავლის არსებობის აქსიომას და მასზე ბევრად ძლიერიც არის. მისი საშუალებით შესაძლებელია კლასების უგულებელყოფა და მაშასადამე, შესაძლებელია მხოლოდ სიმრავლეებზე ლაპარაკი. ამასთან უნივერსალური სიმრავლე ჩვენს მიერ ჩამოყალიბებული აქსიომათა სისტემისათვის წარმოადგენს საკმაოდ ბუნებრივ მოდელს ყველა სიმრავლეთა კლასისთვის. (იხ. [10], [4],[34]).

ZFC თეორიაში უნივერსალური სიმრავლის ანალოგს იძლევა ფონ ნეიმანის უნივერსუმის გარკვეული საწყისი ფრაგმენტი. ფონ ნეიმანის მიერ ტრანსფინიტური

რეკურსიის მეთოდით აგებული იყო სიმრავლეთა V ერთობლიობა. მის სიმრავლეებს ხშირად კარგად დაფუძნებულ (ან ფუნდირებულ) სიმრავლეებს უწოდებენ (იხ. [1], [4], [8], [17], [32]).

ფონ ნეიმანის უნივერსუმის აგების სქემა შემდეგნაირად გამოიყურება. ტრანსფინიტური რეკურსიით თანმიმდევრულად განვსაზღვრავთ V_α სიმრავლეებს, სადაც α ნებისმიერი ორდინალია. პირველ რიგში გვაქვს:

$$V_0 = \emptyset,$$

ე.ი. საწყის საფეხურზე ვიღებთ ცარიელ სიმრავლეს. შემდეგ გვაქვს:

$$V_{\alpha+1} = P(V_\alpha),$$

სადაც $P(V_\alpha)$-თი აღვნიშნავთ უკვე აგებული V_α სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს, ანუ V_α-ს ბულეანს.

აგრეთვე გვაქვს:

$$V_\alpha = \cup \{V_\beta : \beta < \alpha\},$$

სადაც α ნებისმიერი ზღვარითი ორდინალია.

სრულიად ცხადია, რომ ჩამოთვლილი პირობები ყოველი α-სთვის კორექტულად და ცალსახად განსაზღვრავს შესაბამის V_α სიმრავლეს.

და ბოლოს, შემოგვაქვს სიმბოლური აღნიშვნა:

$V = \cup \{V_\alpha : \alpha$ ორდინალია$\}$.

ეს აღნიშვნა სომბოლურია სწორედ იმიტომ, რომ ყველა ორიდნალთა ერთობლიობა არ არის სიმრავლე. თავის დროზე ამ ფაქტს ბურალი-ფორტის პარადოქსს უწოდებდნენ. მომავალში ჩვენ უბრალოდ ვიგულისხმებთ, რომ რაიმე სიმრავლე ეკუთვნის V კლასს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა იგი რომელიმე V_α სიმრავლეს ეკუთვნის. თუ α არის მკაცრად მიუღწევადი ორდინალი, მაშინ V_α წარმოადგენს ZFC თეორიის მოდელს და იგი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც უნივერსალური სიმრავლის მაგალითი (იხ. [8], [14], [17], [32]).

როგორც ცნობილია, ZF სიმბოლოთი აღინიშნება სიმრავლეთა თეორიის ფრაგმენტი, რომლიდანაც ამოღებულია ამორჩევის აქსიომა. ფეფერმანისა და ლევის მიერ ნაჩვენები იყო, რომ არსებობს ZF თეორიის ისეთი უცნაური მოდელები, რომლებშიც $\boldsymbol{R}$ ღერძი წარმოიდგინება როგორც თვლადი სიმრავლეების თვლადი ოჯახის გაერთიანება (იხ. [24],[33]). ეს მნიშვნელოვანი გარემოება კიდევ ერთხელ მიუთითებს იმაზე, რომ კლასიკური მათემატიკური ანალიზისთვის აუცილებელია ამორჩევის აქსიომის რაიმე ფორმის მიღება. წინააღმდეგ შემთხვევაში ვერ დავამტკიცებთ ანალიზისა და წერტილოვანი სიმრავლეების თეორიის ზოგიერთ ძირითად ფაქტსაც კი.

როგორც ცნობილია, ჰილბერტმა ამორჩევის აქსიომის გლობალურ ფორმაზე დაყრდნობით შემოიტანა გლობალური ოპერატორი τ, რომელსაც აქვს შემდეგი

თვისება: $\tau_x R(x)$ ობიექტი ასრულებს $\{x : R(x)\}$ კლასიდან ამორჩეული ელემენტის როლს (თუ კი ეს კლასი ცარიელი არ არის). სწორედ გლობალური τ-ოპერატორის საშუალებით შესაძლებელია $\forall$ და $\exists$ კვანტორების შემოტანა. ეს შემდეგნაირად ხორცილდება:

როგორც ვიცით, $(\forall x)R(x)$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ, როგორც $\neg(\exists x)(\neg R(x))$ ფორმულა. მართებულია ეკვივალენტობა:

$$(\exists x)R(x) \Leftrightarrow R(\tau_x R(x)).$$

ვაჩვენოთ, რომ $(\exists x)R(x) \Rightarrow R(\tau_x R(x))$. ვთქვათ, τ არის გლობალური ამორჩევის ფუნქცია ანუ $\tau_x R(x)$ არის ობიექტი, რომელიც $\{x : R(x)\}$ არაცარიელი კლასის ელემენტია. $(\exists x)R(x)$ სწორედ იმას ნიშნავს, რომ $\{x : R(x)\} \neq \emptyset$, ე.ი. გვაქვს $\tau_x R(x) \in \{x : R(x)\}$ და, მაშასადამე, ჭეშმარიტია $R(\tau_x R(x))$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $R(\tau_x R(x)) \Rightarrow (\exists x)R(x)$. ვთქვათ, სრულდება $R(\tau_x R(x))$. აქ $\tau_x R(x)$ წარმოადგენს ჩვენი თეორიის რომელიღაც ტერმს, მაგალითად, $t = \tau_x R(x)$. ამრიგად $R(t)$ არის სამართლიანი დებულება. მაგრამ ჩვენ ვიცით, რომ პირველი რიგის ლოგიკის $R(t) \Rightarrow (\exists x)R(x)$ აქსიომის თანახმად, სამართლიანია იმპლიკაცია $R(\tau_x R(x)) \Rightarrow (\exists x)R(x)$ და, შესაბამისად, ჭეშმარიტია $(\exists x)R(x)$. ამრიგად, დამტკიცდა, რომ ამორჩევის აქსიომის გლობალური ფორმის საშუალებით შესაძლებელია ფორმალური თეორიისათვის ზოგადობისა და არსებობის კვანტორების შემოტანა.

მომდევნო პარაგრაფებში შევეხებით სხვადასხვა ტიპის წერტილოვან სიმრავლეებს და მათ თვისებებს. მიუხედავად იმისა, რომ ის სიმრავლეები განლაგებულია კონკრეტულ სივრცეებში (მაგალითად, $\boldsymbol{R}$ ნამდვილ ღერძზე და $\boldsymbol{R}^2$ ევკლიდურ სიბრტყეში), მათი სტრუქტურული თვისებები საკმაოდ ხშირად უცნაურად აირეკლება აბსტრაქტულ სიმრავლეებზე და მათ სიმძლავრეებზე. მაგალითად, ამჟამად ცნობილია, რომ წერტილოვანი სიმრავლეების ლებეგის აზრით ზომადობის საკითხი ზოგჯერ უშუალოდ უკავშირდება დიდ კარდინალურ რიცხვთა არსებობის საკითხებს (იხ. [4], [6] , [8], [32]).

§2. ამორჩევის აქსიომა, მისი თვლადი და არათვლადი ფორმები, მისი როლი თანამედროვე მათემატიკაში

ამორჩევის აქსიომა ანუ ცერმელოს აქსიომა წარმოადგენს თანამედროვე მათემატიკის უმნიშვნელოვანეს პოსტულატს. ეს აქსიომა გამოიყენება თანამედროვე მათემატიკის უამრავ დარგში, კონკრეტულად კი ისეთ მიმართულებებში, როგორიცაა სიმრავლეთა თეორია, მათემატიკური ლოგიკა, მოდელების თეორია, კლასიკური მათემატიკური ანალიზი, ფუნქციონალური ანალიზი, ტოპოლოგია, ალგებრა, ალბათობის თეორია, გრაფთა თეორია, უსასრულო კომბინატორიკა და ა.შ. (იხ. [4], [6] , [14], [15], [16], [17], [20], [33]).

ამორჩევის აქსიომის ჩამოყალიბება რამოდენიმე ფორმითაა შესაძლებელი:

(1) მულტიპლიკაციური ფორმა, რომელიც რასელს ეკუთვნის: არაცარიელ სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახის დეკარტული ნამრავლი არაცარიელია.
(2) ცერმელოსეული ფორმა: თუ მოცემულია არაცარიელ სიმრავლეთა ნებისმიერი დიზიუნქტიური ოჯახი, მაშინ არსებობს სიმრავლე, რომელსაც ამ ოჯახის თითოეულ წევრთან ერთი და მხოლოდ ერთი საერთო ელემენტი აქვს.
(3) ამორჩევის ფუნქციის არსებობის ფორმა: ყოველი E სიმრავლისათვის არსებობს $f : P(E)\setminus\{\varnothing\} \rightarrow E$ ამორჩევის ფუნქცია, სადაც $P(E)$ აღნიშნავს E სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს; ე.ი. როგორიც არ უნდა იყოს E-ს არაცარიელი X ქვესიმრავლე, გვაქვს $f(\mathrm{X}) \in \mathrm{X}$.

როგორც წესი, ამორჩევის აქსიომას აღნიშნავენ ხოლმე AC სიმბოლოთი (Axiom of Choice). ღრმა ლოგიკური გამოკვლევების შედეგად დადგინდა, რომ ცერმელოს აქსიომას განსაკუთრებული როლი უკავია სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატიკაში.

ამორჩევის აქსიომის ყველაზე მოულოდნელ და უცნაურ შედეგად ითვლება ე.წ. ბანახ-ტარსკის პარადოქსი (იხ. [35]). ამ პარადოქსის თანახმად, რაგინდ დიდი დადებითი r რიცხვისათვის ერთეულოვანი რადიუსის მქონე სამგანზომილებიანი ბირთვი შეიძლება დაიყოს სასრული რაოდენობის ნაწილებად ისე, რომ ამ ნაწილების სივრცეში სათანადო გადაადგილებებით (ანუ მოძრაობებით) სრულიად შეივსება r-რადიუსიანი სამგანზომილებიანი ბირთვი.

ჰილბერტი და შემდგომ თვითონ ცერმელოც ამორჩევის აქსიომას განიხილავდნენ არა მხოლოდ როგორც სიმრავლეთა თეორიის აუცილებელ პოსტულატს, არამედ მასში ხედავდნენ ზოგად ლოგიკურ პრინციპს, რომლის გარეშეც თანამედროვე მათემატიკა საერთოდ ვერ იარსებებს. ეს არგუმენტი შემდგომში საკმარისად გამყარდა, რადგან აღმოჩნდა, რომ ამორჩევის აქსიომის გლობალური ფორმის საშუალებით შესაძლებელია არსებობისა (∃) და ზოგადობის (∀) კვანტორების შემოტანა (ამასთან დაკავშირებით იხ §1).

როგორც ვიცით, ამორჩევის აქსიომის გლობალურ ფორმა შემდეგი სახით ყალიბდება:

არსებობს გლობალური ოპერატორი τ , რომელიც ყოველ არაცარიელ კლასს უთანადებს ამ კლასის ერთ-ერთ ელემენტს.

როგორც ცნობილია, კლასის ცნება წარმოიშვა მას შემდეგ, რაც სიმრავლეთა თეორიაში რასელის პარადოქსმა და სხვა მსგავსმა პარადოქსებმა იჩინა თავი (იხ. §1). რასელის პარადოქსის თანახმად, ზოგიერთი კლასი არ წარმოადგენს სიმრავლეს (იხ. [3]). ვთქვათ, $R(x)$ არის თავისუფალი x ცვლადის შემცველი დამოკიდებულება და განვიხილოთ ობიექტი $\{x : R(x)\}$, რომელიც საზოგადოდ კლასს წარმოადგენს. $R(x)$ დამოკიდებულებას ეწოდება მაკოლექტივიზირებელი, თუ ეს ობიექტი არის სიმრავლე. თუ $R(x)$ -ის როლში ავიღებთ, $x \notin x$ დამოკიდებულებას, მაშინ ამ შემთხვევაში $R(x)$ არ არის მაკოლექტივიზირებელი და, მაშასადამე, $\{x : x \notin x\}$ არ არის სიმრავლე, ანუ არის საკუთრივი კლასი.

ჰილბერტმა ამორჩევის აქსიომის გლობალურ ფორმას მისცა წმინდა ლოგიკური სახე და მასზე დაყრდნობით შემოიტანა გლობალური ოპერატორი τ, რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება: $\tau_x R(x)$ ობიექტი ასრულებს $\{x: R(x)\}$ კლასიდან ამორჩეული ელემენტის როლს. სწორედ გლობალური τ-ოპერატორის საშუალებით შესაძლებელია ∀ და ∃ კვანტორების შემოტანა (იხ. §1) .

მაგრამ რამდენადაც თანამედროვე მათემატიკის სტანდარტულ დარგებში არ განიხილავენ კლასებს და ძირითადად საქმე აქვთ სიმრავლეებთან, ამიტომ ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ ამორჩევის აქსიომის ლოკალურ ფორმებს, კერძოდ კი ცერმელოს აქსიომას. დამტკიცებულია, რომ ამორჩევის აქსიომის ლოკალური ფორმიდან არ გამომდინარეობს ამორჩევის აქსიომის გლობალური ფორმა (იხ. [1], [3], [13]).

თავად ამორჩევის აქსიომის სასრული ვერსიიდან გამომდინარეობს მესამეს გამორიცხვის კანონი, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში: $A \vee \neg A$ ყოველი A დებულებისათვის, რომელიც თავისუფალ საგნობრივ ცვლადებს არ შეიცავს. ხოლო მესამეს გამორცხვის კანონის უგულვებელყოფით ლოგიკურ აქსიომატიკაში ჩამოყალიბდა არაკლასიკური ლოგიკები, კერძოდ კი ლ. ბროუერმა გამოთქვა იდეა იმის შესახებ, რომ კლასიკური ლოგიკის აქსიომათა რიგიდან ამოეგდოთ „მესამეს გამორიცხვის კანონი" და შეესწავლათ მიღებული თეორია. ასეთი მიდგომის საფუძველზე ჩამოყალიბდა ინტუიციონისტური ლოგიკა. კლასიკური ლოგიკისგან განსხვავებით, რომლის მოდელს წარმოაგდენს ბულის ალგებრა. ინტუიციონისტური ლოგიკის მოდელია ჰეიტინგის ალგებრა (იხ. [4], [9], [35]).

ამორჩევის აქსიომას გააჩნია რამოდენიმე ლოგიკური ეკვივალენტი ZF თეორიის ჩარჩოებში.

1. ცერმელოს თეორემა ნებისმიერი სიმრავლის სავსებით დალაგების შესახებ: ყოველი X სიმრავლისათვის არსებობს მისი ბიექცია სავსებით დალაგებულ სიმრავლეზე. მაშასადამე, ნებისმიერი X სიმრავლე შეიძლება აგრეთვე განხილული იყოს როგორც სავსებით დალაგებული სიმრავლე.
2. კურატოვსკი-ჰაუსდორფის თეორემა: ყოველი (E,≤) ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეში არსებობს მაქსიმალური (ჩართვის დამოკიდებულების თვალსაზრისით) წრფივად დალაგებული ქვესიმრავლე.

ნაწილობრივად დალაგებულ (E, ≤) სიმრავლეს ინდუქციური ეწოდება, თუ მისი ყოველი წრფივად დალაგებული ქვესიმრავლე ზემოდანაა შემოსაზღვრული (ე.ი ყოველ ასეთ ქვესიმრავლეს აქვს ერთი მაინც მაჟორანტი).

3. ცორნის ლემა: ნებისმიერ ინდუქციურ $(E,\leq)$ სიმრავლეში არსებობს ერთი მაინც მაქსიმალური ელემენტი, ე.ი. ისეთი e ელემენტი, რომ $e < x$ დამოკიდებულება მცდარია ყველა $x \in E$ ელემენტისათვის.

ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება კვაზიკომპაქტური, თუ მისი ნებისმიერი ღია დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა (იხ. [3]).

ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება კომპაქტური, თუ იგი არის ერთდროულად კვაზიკომპაქტური და ჰაუსდორფის სივრცე (იხ. [3]).

4. ტიხონოვის თეორემა კვაზიკომპაქტური სივრცეების ტოპოლოგიური ნამრავლების შესახებ: კვაზიკომპაქტური სივრცეების ტოპოლოგიური ნამრავლი კვლავ კვაზიკომპაქტური სივრცეა.

ასევე დამტკიცდა, რომ ნებსმიერი ვექტორული სივრცისათვის მისი ბაზისის არსებობის დებულება ამორჩევის აქსიომის გარკვეულ ეკვივალენტს წარმოადგენს. მაგრამ აქ არის ერთი მნიშვნელოვანი ნიუანსი, რომელიც რეგულარობის აქსიომასთანაა დაკავშირებული. ანუ აღნიშნული ეკვივალენტობის დამტკიცებისას არსებითად გამოიყენება რეგულარობის აქსიომა (იხ. [37]).

რეგულარობის (ანუ ფუნდირების) აქსიომა არის სიმრავლეთა თეორიის შემდეგი წინადადება:

$$(\forall X)(X \neq \emptyset \Rightarrow \big((\exists Y \in X)(X \cap Y = \emptyset)\big).$$

იგი შემოტანილი იყო ფონ ნეიმანის მიერ და ჩვეულებრივ AF სიმბოლოთი აღინიშნება (Axiom of Foundation). აქვე აღვნიშნოთ, რომ ამ აქსიომას მათემატიკურ პრაქტიკაში თითქმის არ იყენებ (იხ. [3]).

ამის გარდა დადგინდა, რომ სასრული სიმრავლის განსაზღვრაც მჭიდროდაა დაკავშირებული ამორჩევის აქსიომასთან. კერძოდ კი, სასრულობის სხვადასხვა განმარტებების ეკვივალენტობის საჩვენებლად საჭირო გახდა ამორჩევის აქსიომის ამა თუ იმ ფორმის გამოყენება.

მოვიყვანოთ სასრული სიმრავლის რამოდენიმე განმარტება.

ა. X სიმრავლე არის სასრული, თუ არ არსებობს X-ის ბიექცია თავის საკუთრივ ნაწილზე (დედეკინდი);
ბ. X სიმრავლე არის სასრული, თუ არსებობს X-ის სავსებით დალაგება ისეთი, რომ X-ის ყოველ არაცარიელ ნაწილში მოიძებნება უდიდესი ელემენტი (ცერმელო);
გ. X სიმრავლე არის სასრული, თუ X-ის ნაწილთა ნებისმიერ არაცარიელ ოჯახში არსებობს მინიმალური ელემენტი ჩართვის დამოკიდებულების თვალსაზრისით (ტარსკი);
დ. X სიმრავლე არის სასრული, თუ არსებობს ნატურალური რიცხვი ფონ ნეიმანის აზრით, რომელიც ბიექციურად აისახება X-ზე.
ე. X სიმრავლე არის სასრული, თუ $card(X) \neq card(X) + 1$.

ცერმელოს აქსიომის მნიშვნელობა ცხადად ჩანს უკვე კლასიკური მათემატიკური ანალიზის ძირითადი ცნებებისა და ფაქტების განხილვის დროს.

გავიხსენოთ, თუნდაც რაიმე $f: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ ფუნქციის $\boldsymbol{R}$-ის ფიქსირებულ წერტილში უწყვეტობის ცნება. ანალიზში ფართოდ გამოიყენება ორი კლასიკური განსაზღვრა. პირველი მათგანი ეკუთვნის ო. კოშის, ხოლო მეორე – ჰ. ჰაინეს.

კოშის განსაზღვრა: ამბობენ, რომ f ფუნქცია უწყვეტია ფიქსირებულ $x \in \mathbf{R}$ წერტილში, თუ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის მოიძებნება $\delta > 0$ რიცხვი, რომლისთვისაც მართებულია

$$(\forall y)((y \in \boldsymbol{R} \,\&\, |y - x| < \delta) \Rightarrow (|f(y) - f(x)| < \varepsilon))$$

დამოკიდებულება.

ჰაინეს განსაზღვრა: ამბობენ, რომ f ფუნქცია უწყვეტია ფიქსირებულ $x \in \mathbf{R}$ წერტილში, თუ $\mathbf{R}$-ის წერტილთა ყოველი $\{x_n : n \in N\}$ მიმდევრობისთვის, რომელიც არის x-სკენ კრებადი, წერტილთა შესაბამისი $\{f(x_n): n \in N\}$ მიმდევრობა $f(x)$-სკენ კრებადია.

კლასიკური მათემატიკური ანალიზიდან ცნობილია, რომ უწყვეტობის ორივე მოყვანილი განსაზღვრა ერთმანეთის ეკვივალენტურია. მართლაც, არავითარ სიძნელეს არ წარმოადგენს იმის დასაბუთება, რო თუ $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ფუნქცია უწყვეტია $x \in \mathbf{R}$ წერტილში, კოშის აზრით, მაშინ იგი ამავე x წერტილში უწყვეტი იქნება ჰაინეს აზრითაც. ამ გამომდინარეობის ჩვენება არ მოითხოვს ამორჩევის აქსიომის გამოყენებას, მაგრამ შებრუნებული იმპლიკაციის ჩვენება არსებითად ეყრდნობა ცერმელოს აქსიომას. მოვიყვანოთ შებრუნებული იმპლიკაციის დეტალური დამტკიცება ამორჩევის აქსიომის ერთ-ერთი სუსტი ფორმის გამოყენებით.

ვთქვათ, f უწყვეტია $x \in \mathbf{R}$ წერტილში ჰაინეს აზრით. უნდა ვაჩვენოთ, რომ f უწყვეტია ამავე წერტილში კოშის აზრითაც. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს ისეთი $\varepsilon > 0$ რიცხვი, რომ, როგორიც არ უნდა იყოს $\delta > 0$ რიცხვი, მისთვის მოიძებნება ერთი მაინც $y \in \mathbf{R}$ წერტილი, რომლისთვისაც მართებულია

$$|y - x| < \delta \,\&\, |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

დამოკიდებულება, ანუ

$$Y(\delta) = \{y : y \in \mathbf{R} \,\&\, |y - x| < \delta \,\&\, |f(y) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

სიმრავლე არ არის ცარიელი. ახლა δ-ს თანმიმდევრულად მივანიჭოთ 1, 1/2, 1/3, . . . $\frac{1}{n}$, . . . , მნიშვნელობები და განვიხილოთ

$$\{Y\left(\frac{1}{n}\right) : n \in N \setminus \{0\}\}$$

არაცარიელ სიმრავლეთა თვლადი ოჯახი. ამორჩევის აქსიომის თანახმად, ამ თვლადი ოჯახისათვის არსებობს სელექტორი, ე.ი. გვაქვს $\{y_n : n \in N \setminus \{0\}\}$ წერტილთა მიმდევრობა, ისეთი, რომ $y_n \in Y(1/n)$ ყველა $n \in N/\{0\}$ ინდექსისათვის. ანუ გვაქვს შემდეგი დებულებები:

$$|y_n - x| < \frac{1}{n} \;\&\; |f(y_n) - f(x)| \geq \varepsilon \quad (n \in N \setminus \{0\}).$$

ამრიგად, ჩვენ ვხედავთ, რომ აღნიშნული $\{y_n : n \in N \setminus \{0\}\}$ მიმდევრობა კრებადია x-სკენ, მაგრამ მისი შესაბამისი $\{f(y_n) : n \in N \setminus \{0\}\}$ მიმდევრობა არ არის კრებადი $f(x)-$ სკენ, რაც ეწინააღმდეგება ჰაინეს განსაზღვრაში მონაწილე პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა მიუთითებს იმაზე, რომ ჩვენი თავდაპირველი დაშვება არ იყო სწორი და, მაშასადამე, ამით მკაცრად დადგინდა, რომ ჰაინეს განსაზღვრიდან გამომდინარეობს კოშის განსაზღვრა. (იხ. [1], [15], [16], [19])

გარდა ამისა, მოყვანილი მსჯელობიდან ჩანს, რომ აქ ჩვენ გამოვიყენეთ ამორჩევის აქსიომის საკმაოდ სუსტი ფორმა. სახელდობრ, ამ მსჯელობაში ჩვენს მიერ მხოლოდ ის იყო ნაგულისხმევი, რომ:

R-ის არაცარიელ ქვესიმრავლეთა ნებისმიერი მიმდევრობის ნამრავლი აგრეთვე არაცარიელი სიმრავლეა.

თუ საქმე გვაქვს არაცარიელ სიმრავლეთა სასრულ მიმდევრობასთან, მაშინ ცერმელოს აქსიომა არ არის საჭირო. მაგრამ თუ საქმე ეხება არაცარიელ სიმრავლეთა უსასრულო მიმდევრობებს, მაშინ მთელ რიგ შემთხვევებში ცერმელოს აქსიომას ვერ გავექცევით და იძულებულნი ვიქნებით არსებითად გამოვიყენოთ იგი.

ამორჩევის აქსიომის ერთ-ერთი საკმაოდ სუსტი ფორმა შეიძლება შემდეგნაირად ჩამოყალიბდეს:

თუ მოცემულია ორელემენტიან სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახი, მაშინ ამ ოჯახს გააჩნია ერთი სელექტორი მაინც.

აქვე ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ ამორჩევის აქსიომის ეს სუსტი ფორმაც კი მათემატიკაში უცნაური თვისებების მქონე წერტილოვანი სიმრავლეების არსებობას იძლევა, კერძოდ, ნამდვილ რიცხვთა **R** ღერძზე ლებეგის არაზომადი სიმრავლის არსებობას, რაც თავის დროზე ნაჩვენები იყო ვ. სერპინსკის მიერ (იხ. [6], [13], [16] ,[18],[19], [38]).

მათემატიკის განვითარებაში დიდი მნიშვნელობა ენიჭება ამორჩევის აქსიომის არათვლად ფორმებს. სწორედ არათვლადი ფორმების საშუალებით იქნა ნაჩვენები ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლის არსებობა.

1905 წელს ჯ. ვიტალის მიერ პირველად აგებული იქნა ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლის მაგალითი (იხ. [22]). დაწვრილებით განვიხილოთ იგი, რადგან ეს მაგალითი შემდგომშიც გვჭირდება.

ავიღოთ ბინარული მიმართება $V(x, y)$ ნამდვილ რიცხვთა **R** ღერძზე, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$V(x, y) \Leftrightarrow \; x \in \mathbf{R} \;\&\; y \in \mathbf{R} \;\&\; x - y \in \mathbf{Q},$$

სადაც **Q** არის ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლე. რადგან **Q** არის $(\mathbf{R}, +)$ ადიტიური ჯგუფის ქვეჯგუფი, ამიტომ $V(x, y)$ წარმოადგენს ექვივალენტობის მიმართებას. განვიხილოთ ექვივალენტობის კლასები შემოტანილი $V(x, y)$ ბინარული

დამოკიდებულების მიმართ. ეს კლასები ქმნიან **R** ღერძის გარკვეულ დანაწილებას (დაყოფას). ასეთი სახის დანაწილებას ეწოდება **R** სიმრავლის ვიტალის დანაწილება და აღინიშნება $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ სიმბოლოთი. ვიტალის დანაწილების ნებისმიერ სელექტორს ეწოდება **R** ღერძის ვიტალის ქვესიმრავლე.

ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი ვიტალის სიმრავლე არის ლებეგის აზრით არაზომადი. დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, X არის ვიტალის სიმრავლე და ამასთან ლებეგის აზრით ზომადი. სამართლიანია წარმოდგენა

$$\mathbf{R} = \cup\{X + q : q \in \mathbf{Q}\},$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ X უნდა იყოს დადებითი ზომის სიმრავლე (ლებეგის ზომის ინვარიანტულობის გამო). ამავე დროს, $\forall q \neq 0$ რაციონალური რიცხვისათვის გვაქვს

$$(X + q) \cap X = \emptyset.$$

რადგან X არის ვიტალის დანაწილების სელექტორი. ბოლო ტოლობაში q შეიძლება იყოს რაგინდ მცირე არანულოვანი რაციონალური რიცხვი, ეს კი ეწინააღმდეგება შტაინჰაუზის თვისებას (იხ. [29]). მაშასადამე, X ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლეა.

გავიხსენოთ, რაში მდგომარეობს შტაინჰაუზის თვისება, რომელიც წინა მსჯელობაში არსებითად გამოვიყენეთ. (იხ. [4], [25], [38],[39]).

ვთქვათ, X არის $\mathbf{R}$–ის რაიმე ქვესიმრავლე. ვიტყვით, რომ X-ს აქვს შტაინჰაუზის თვისება, თუ არსებობს $\varepsilon > 0$ ისეთი, რომ

$$(\forall h \in \mathbf{R})(|h| < \varepsilon \Rightarrow (X + h) \cap X \neq \emptyset).$$

თუ X ლებეგის აზრით ზომადია და მას აქვს მკაცრად დადებითი ზომა, მაშინ არსებობს ისეთი $\varepsilon > 0$, რომ

$$(\forall h \in \mathbf{R})(|h| < \varepsilon \Rightarrow \mu((X + h) \cap X)) > 0).$$

ეს ფაქტი მარტივად გამომდინარეობს ლებეგის ცნობილი თეორემიდან, რომლის თანახმადაც X-ს აქვს სიმკვრივის წერტილები (იხ. [4], [25], [29], [40]).

ამრიგად ვღებულობთ, რომ ყოველი ლებეგის აზრით ზომად და დადებითი ზომის მქონე სიმრავლეს აქვს შტაინჰაუზის თვისება, რაც ზემოთ არსებითად დაგვჭირდა.

ამორჩევის აქსიომის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან ფორმას წარმოადგენს დამოკიდებული ამორჩევის პრინციპი. ეს ფორმა შემოღებული იქნა პ. ბერნაისის მიერ და საყოველთაოდ იქნა მიღებული სიმრავლეთა თეორიის სპეციალისტების მიერ, რადგან იგი მეტად სასარგებლო გამოდგა ზოგიერთი სიმრავლურ-თეორიული მოდელის განხილვის პროცესში (იხ. [5]).

ამ პრინციპს DC-თი აღნიშნავენ და ყალიბდება შემდეგნაირად:

ვთქვათ, არაცარიელ X სიმრავლეზე მოცემულია ბინარული $S(x,y)$ მიმართება ისეთი, რომ

$$(\forall x \in X)(\exists y \in X)S(x,y).$$

მაშინ არსებობს ამ სიმრავლის ელემენტთა $\{x_n : n \in N\}$ მიმდევრობა ისეთი, რომ

$$(\forall n \in N)(x_n, x_{n+1}).$$

ბერნაისის დამოკიდებული ამორჩევის პრინციპი ინტუიციურად თითქმის ცხადია და ZF -ის ფარგლებში ლოგიკურად გამომდინარეობს ცერმელოს აქსიომიდან. მართლაც, ცერმელოს აქსიომის ძალით, X სიმრავლისთვის შეგვიძლია დავაფიქსიროთ რაიმე ამორჩევის ფუნქცია

$$g : P(X) \setminus \emptyset \to X$$

ე.ი. ისეთი g ფუნქცია, რომელიც X -ის ყოველ არაცარიელ ქვესიმრავლეს უთანადებს ამ ქვესიმრავლის გარკვეულ ელემენტს.

რადგან $X \neq \emptyset$, ამიტომ შეგვიძლია ავიღოთ $x_0 = g(X)$. ამის შემდეგ მსჯელობას ვაწარმოოთ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით. თუ $x_n \in X$ ელემენტი უკვე განსაზღვრულია, ვიხილავთ

$$Y(n) = \{y : y \in X \& S(x_n, y)\}$$

სიმრავლეს, რომელიც პირობის თანახმად არაცარიელია. მაშასადამე შეგვიძლია ავიღოთ $x_{n+1} = g(Y(n))$. ამ პროცესით ცალსახად აიგება X სიმრავლის ელემენტთა ჩვენთვის სასურველი $\{x_n : n \in N\}$ მიმდევრობა.

ამჟამად ცნობილია, რომ DC პრინციპი უფრო სუსტია, ვიდრე ამორჩევის აქსიომა.

ნებისმიერი $m > 1$ ნატურალური რიცხვისათვის AC(m)-ით აღვნიშნოთ შემდეგი წინადადება:

თუ მოცემულია m -ელემენტიან სიმრავლეთა რაიმე ოჯახი, მაშინ მას აქვს ერთი სელექტორი მაინც.

საინტერესო გამოკვლევები იყო ჩატარებული იმ მიმართულებით, რომ დაედგინათ, რომელი m და n ნატურალური რიცხვებისათვის AC(m) წინადადებიდან გამომდინარეობს AC(n) წინადადება. აღმოჩნდა, რომ ეს საკითხი მჭიდროდ არის დაკავშირებული m და n რიცხვების ერთობლივ არითმეტიკულ თვისებებთან (იხ. [1], [6], [14], [18]).

ცერმელოს აქსიომის გარეშე შეიძლება ZF თეორიას ჰქონდეს უცნაური თვისებების მქონე მოდელები. მაგალითად, ს. ფეფერმენისა და ა. ლევის მიერ აგებული იქნა ZF -ის ისეთი მოდელი, რომელშიც **R** რიცხვთა ღერძი წარმოიდგინება როგორც თვლადი სიმრავლეების თვლადი გაერთიანება (იხ. [24], [33]).

თეორემა 1 (ZF). (ა) თუ შესაძლებელია $\mathbf{R}$ ნამდვილი ღერძის წარმოდგენა თვლადი სიმრავლეების თვლადი გაერთიანებით, მაშინ არც $\omega_1 \leq c$ უტოლობას და არც $\omega_1 \geq c$ უტოლობას არა აქვს ადგილი, ე.ი. ეს ორი კარდინალური რიცხვი ერთმანეთთან არასადარია

(ბ) თუ α არის ნებისმიერი ორდინალური რიცხვი, მაშინ $\omega_{\alpha+2}$ ვერ წარმოიდგინება

$$\omega_{\alpha+2} = \bigcup_{\xi<\omega_\alpha} X_\xi$$

სახით, სადაც თითოეული X_ξ სიმრავლის სიმძლავრე ω_α-ს არ აღემატება. კერძოდ, შეუძლებელია ω_2 მეორე არათვლადი კარდინალური რიცხვის წარმოდგენა თვლადი სიმრავლეების თვლადი გაერთიანებით.

დამტკიცება. (ა) ZF თეორიის ჩარჩოებში ცნობილია შემდეგი ფაქტი: $\mathbf{R} \approx \mathbf{R}^\omega$. მაშასადამე, თუ $\mathbf{R} = \bigcup_{n\in N} X_n$, მაშინ $\mathbf{R}^\omega = \bigcup_{n<\omega} F_n$, სადაც თითოეული F_n თვლადია. ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ თუ სრულდება ზემოაღნიშნული წარმოდგენა $\mathbf{R} = \bigcup_{n\in N} X_n$, მაშინ უტოლობებს $\omega_1 \leq c$ და $\omega_1 \geq c$ ადგილი არ აქვთ, ანუ შეუძლებელია $\omega_1 \subset \mathbf{R}$ ჩადგმის განხორციელება.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი ვთქვათ $\mathbf{R}$ არის თვლადი სიმრავლეების თვლადი გაერთიანება და ამასთან $\omega_1 \leq c$ უტოლობაც სრულდება. ავაგოთ ფუნქცია $h\colon \omega \to \mathbf{R}^\omega$ ისეთი, რომ h განსაზღვრულია ω-ზე და $h \notin \bigcup_{n\in\omega} F_n$, სადაც თითოეული F_n არის თვლადი სიმრავლე და $\mathbf{R}^\omega = \bigcup_{n<\omega} F_n$. ჩხადია შეგვიძლია დავწეროთ

$$F_n = \{f_1, f_2, \dots, f_k, \dots\},$$

სადაც $(\forall k \in N)(f_k\colon \omega \to \mathbf{R})$. დავაფიქსიროთ $n \in \omega$ და განვიხილოთ სიმრავლე $\{f_k(n): k \in N\} \subset \mathbf{R}$.

რადგან ω_1 სავსებით დალაგებული არათვლადი სიმრავლეა, შეგვიძლია ავიღოთ მისი უმცირესი ელემენტი t_n, რომელიც არ ეკუთვნის $\{f_k(n): k \in N\}$ არაუმეტეს თვლად სიმრავლეს და განვსაზღვროთ $h(n) = t_n$, რითაც მივიღებთ ყოველი n-სთვის $h(n) \in \mathbf{R}$ მნიშვნელობას ამორჩევის აქსიომის გამოყენების გარეშე. ანუ მივიღეთ ფუნქცია $h : \omega \to \mathbf{R}$. ვაჩვენო, რომ ეს h არ ეკუთვნის $\bigcup_{n\in N} F_n$ სიმრავლეს.

მართლაც, დავუშვათ, რომელიმე F_n–სთვის $h \in F_n$, ე.ი. $h = f_k$. მაშინ ვღებულობთ $h(n) = f_k(n)$, მაგრამ ჩვენი აგების თანახმად $h(n) = t_n \neq f_k(n)$. მივიღეთ წინააღმდეგობა. ამრიგად ვერ შესრულდება $\omega_1 \subset \mathbf{R}$ ჩადგმა და ვერც უტოლობები $\omega_1 \leq c$ და $\omega_1 \geq c$.

(ბ) დავამტკიცოთ კერძო შემთხვევისათვის. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ სამართლიანია წარმოდგენა $\omega_2 = \bigcup_{n\in N} X_n$, სადაც თითოეული X_n არის თვლადი სიმრავლე. სავსებით დალაგებული სიმრავლეებისათვის ZF თეორიის ჩარჩოებში ცნობილია შემდეგი იგივეობა

$$\omega_\alpha \cdot \omega_\beta = \omega_{\max(\alpha,\beta)}$$

(იხ. [3], [13], [14], [17]). კერძო შემთხვევაში გვექნება

$$\omega_0 \cdot \omega_1 = \omega_1,$$

თავის მხრივ კი, $\omega_0 < \omega_1 < \omega_2$ იმავე ZF თეორიაში.

კანტორის თეორემის თანახმად, ნებისმიერი ორი სავსებით დალაგებული სიმრავლე ერთმანეთის სადარია. ანუ თუ გვქავს ტოლობა $\omega_2 = \bigcup_{n \in N} X_n$, მაშინ ყოველი X_n-სათვის არსებობს ω_2-ის საწყისი ინტერვალი α_n, რომელიც X_n-ის იზომორფულია, $\alpha_n \approx X_n$, ხოლო ამასთან α_n საკუთრივად ჩადგმულია ω_1-ში, ვინაიდან X_n თვლადია.

ავიღოთ ω_1 სიმრავლე ω -ჯერ, ე.ი. განვიხილოთ ω_1 -ების მიმდევრობა. ამ მიმდევრობის n-ურ წევრში ჩავარდება შესაბამისი α_n.

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\sum |\alpha_i| \,.\, \omega \leq \omega_1 . \omega = \omega_1$$

და ვღებულობთ, რომ $\omega_2 \leq \omega_1$, რაც წინააღმდეგობას იძლევა. მაშასადამე მეორე არათვლადი კარდინალური რიცხვის წარმოდგენა თვლადი სიმრავლეების თვლადი გაერთიანებით შეუძლებელია.

მოყვანილი მსჯელობის ანალოგიურად ZF თეორიის ჩარჩოებში მტკიცდება ზოგადი დებულებაც.

შენიშვნა: ეს შედეგი გაცილებით უფრო მარტივად მტკიცდება, ვიდრე ს. შელახის ცნობილი შედეგი, რომელიც შემდეგში მდგომარეობს: თუ $ZF\&DC$ თეორიაში გვაქვს $\omega_1 \leq \mathbf{c}$, მაშინ $\mathbf{R}$-ზე არსებობს ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლე (იხ. [41], [42]).

აღვნიშნოთ, რომ ანალოგიური დებულების მართებულობის ჩვენება ω_1 კარდინალური რიცვისათვის ZF-ში შეუძლებელია, ანუ ZF თეორიის ჩარჩოებში ვერ დამტკიცდება ω_1-ის რეგულარობა (იხ. [15]).

§3 წერტილოვანი სიმრავლეები

და მათი დესკრიფციული სტრუქტურა

ამ პარაგრაფში საუბარი გვექნება $\mathbf{R}$ ღერძზე, ან უფრო ზოგადად $\mathbf{R}^n, n \geq 1$ ევკლიდურ სივრცეში მდებარე წერტილოვანი სიმრავლეების დესკრიფციულ თვისებებზე. წერტილოვანი სიმრავლეების დესკრიფციული ანუ აღწერითი სტრუქტურა დიდად არის დამოკიდებული ამოსავალ ლოგიკურ საშუალებებზე, რომელთა მეშვეობითაც ეს სიმრავლეები განიმარტება (განისაზღვრება, აღიწერება). თუ მოცემული სიმრავლე შეიძლება იქნეს განსაზღვრული ეფექტურად, ე.ი ამორჩევის აქსიომის გარეშე, მაშინ მეტ-ნაკლები ალბათობით შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ ასეთი სიმრავლე უფრო მარტივი ბუნებისაა, ვიდრე ის სიმრავლეები, რომელთა განსაზღვრაში ამორჩევის აქსიომა არსებითად მონაწილეობს. ზოგჯერ ისეთი სიტუაციებიც გვხვდება, როცა ამორჩევის აქსიომაც კი არ არის საკმარისი და ამა თუ იმ წერტილოვანი სიმრავლის არსებობისათვის ან მისი თვისებების დადგენისათვის ახალი დამხმარე აქსიომების შემოტანა ხდება აუცილებელი.

XIX საუკუნეში გ. კანტორი იკვლევდა ზოგადი ტრიგონომეტრიული მწკრივის კრებადობის წერტილთა სიმრავლის სტრუქტურას და ამ კვლევის პროცესში მან ჩამოაყალიბა წერტილოვან სიმრავლეებთან დაკავშირებული მთელი რიგი მნიშვნელოვანი ცნებებისა, რომლებიც შემდგომში წარმატებულად გამოიყენა მათემატიკური ანალიზის კონკრეტული საკითხებისა და პრობლემების გადასაწყვეტად. კანტორის გამოკვლევების შემდეგ ცხადი გახდა, რომ მათემატიკური ანალიზისთვის მნიშვნელოვან როლს თამაშობს წერტილოვანი სიმრავლეები და მათი თვისებები.

განვიხილოთ $\mathbf{R}^n, n \geq 1$, სივრცე და მასთან დაკავშირებული რამოდენიმე განმარტება, რაც ფუნდამენტურ როლს ასრულებს მათემატიკურ ანალიზსა და ზოგად ტოპოლოგიაში (იხ. [3], [15], [16], [18], [19], [27], [28])

ცნობილია შემდეგი ფაქტები:

1. $\mathbf{R}^n$სივრცის ყველა რაციონალურ წერტილთა სიმრავლე თვლადია.
2. $\mathbf{R}^n$სივრეს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე.

$\mathbf{R}^n$ სივრცეში აღებული რაიმე E სიმრავლისათვის ამავე სივრცეში აღებულ p წერტილს ეწოდება E სიმრავლის დაგროვების წერტილი, თუ მისი ნებისმიერი მიდამო შეიცავს E სიმრავლის წერტილთა უსასრულო სიმრავლეს.

თუ რომელიმე წერტილი ეკუთვნის E სიმრავლეს, მაგრამ არ წარმოადგენს მის დაგროვების წერტილს, მაშინ მას ეწოდება E სიმრავლის იზოლირებული წერტილი.

$\mathbf{R}^n$ -დან აღებულ რაიმე სიმრავლეს ეწოდება შემოსაზღვრული სიმრავლე, თუ არსებობს ამ სიმრავლის შემცველი n-განზომილებიანი პარალელეპიპედი.

3. ყოველ შემოსაზღვრულ უსასრულო სიმრავლეს აქვს ერთი მაინც დაგროვების წერტილი. (ეს დებულება დამტკიცებადია ZF თეორიის ფარგლებში).

თუ სიმრავლე შეიცავს თავის ყველა დაგროვების წერტილს, მაშინ მას ჩაკეტილი სიმრავლე ეწოდება.

E სიმრავლის რაიმე p წერტილს ეწოდება ამ სიმრავლის შიგა წერტილი, თუ არსებობს ამ წერტილის ისეთი მიდამო, რომელიც მთლიანად შედის E-ში.

E სიმრავლის p წერტილს ეწოდება მისი საზღვრითი წერტილი, თუ ის არ არის არც შიგა და არც გარე წერტილი.

სიმრავლეს ღია სიმრავლე ეწოდება, თუ იგი შედგება მხოლოდ შიგა წერტილებისგან. ღია სიმრავლის დამატებას ჩაკეტილი სიმრავლე ეწოდება

სიმრავლეს ეწოდება სრულყოფილი სიმრავლე, თუ ის არის ჩაკეტილი და მისი ყოველი წერტილი არის მისი დაგროვების წერტილი.

მათემატიკური ანალიზის განვითარებამ გამოიწვია უფრო და უფრო რთული წერტილოვანი სიმრავლეების შესწავლის აუცილებლობა, კერძოდ ნამდვილი რიცხვის ცნების დაფუძნებამ დიდი სტიმული მისცა ამ მიმართულებით კვლევას. იმ დროისთვის აღმოჩენილი იქნა მათემატიკური ობიექტები, რომლებიც მაშინდელ სტანდარტულ მათემატიკურ ობიექტებთან დისონანსში მოდიოდა. ასეთ ცნობილ ობიექტთა რიცხვს მიეკუთვნება კანტორის მიერ ZF თეორიის ჩარჩოებში აგებული შესანიშნავი სრულყოფილი სიმრავლე, ე.წ. კანტორის დისკონტინუუმი, რომელმაც უდიდესი როლი შეასრულა წერტილოვავანი სიმრავლების ზოგად თეორიაში. კანტორის დისკონტინუუმმა საფუძველი ჩაუყარა თანამედროვე ფრაქტალების თეორიას. ამჟამად კანტორის დისკონტინიუმის ქვეშ იგულისხმება ნებისმიერი ტოპოლოგიური სივრცე, რომელიც არის $\{0,1\}^N$ სივრცის ჰომეომორფული, სადაც $\{0,1\}$ სიმრავლე აღჭურვილია დისკრეტული ტოპოლოგიით, ხოლო N სიმბოლო ყველა ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს აღნიშნავს. შეიძლევა ითქვას, რომ კანტორის დისკონტინუუმს აქვს მთელი რიგი საინტერესო და პარადოქსალური თვისებებისა.

ამ ტიპის სხვა უამრავი მაგალითიც არსებობს. მოვიყვანოთ მხოლოდ სამი მათგანი.

(ა) არსებობს $[0,1]$ სეგმენტის ისეთი ჰომეომორფული სახე $\mathbf{R}^2$ სიბრტყეში, რომ მას არც ერთ მის წერტილში არ გააჩნია მხები წრფე;

(ბ) არსებობს უწყვეტი ასახვა $[0,1]$ ერთეულვანი სეგმენტისა $[0,1]^2$ ერთეულოვან კვადრატზე (ე.წ. პეანოს წირი);

(გ) არსებობს $[0,1]$ სეგმენტის ისეთი ჰომეომორფული სახე $\mathbf{R}^2$ სიბრტყეში, რომლის ორგანზომილებიანი ლებეგის ზომა მკაცრად დადებითია.

ნამდვილ ფუნქციათა თეორიასა და ევკლიდური სივრცის ელემენტარულ ტოპოლოგიაში იწყებენ სხვადასხვა ტიპის წერტილოვანი სიმრავლეების მეტ-

ნაკლებად დეტალურად განხილვასა და შესწავლას. თანამედროვე მათემატიკურ ანალიზში, ზოგად ტოპოლოგიასა და ზომის თეორიაში უდიდეს როლს თამაშობენ ბორელის სიმრავლეები (იხ. [4], [14], [26], [27]).

ვთქვათ, E არის ტოპოლოგიური სივრცე. მისი ბორელის σ-ალგებრა ჩვეულებრივ განისაზღვრება როგორც σ-ალგებრა, წარმოქმნილი E-ს ყველა ღია ქვესიმრავლეთა ოჯახით. იგი B(E) სიმბოლოთი აღინიშნება, მის წევრებს კი E-ს ბორელის ქვესიმრავლეებს უწოდებენ.

ბორელის სიმრავლეებზე დაყრდნობით განისაზღვრება ბორელის აზრით ზომადი ანუ ბორელის ასახვები, რომლებიც ერთი ტოპოლოგიური სივრციდან მეორე ტოპოლოგიურ სივრცეში მოქმედებენ. კერძოდ, ვთქვათ E და F ორი ტოპოლოგიური სივრცეა და g არის ასახვა E-დან F-ში, ანუ g : E → F; მაშინ g-ს ეწოდება ბორელის აზრით ზომადი ანუ ბორელის ასახვა, თუ F-ის ყოველი ღია ქვესიმრავლის წინარე სახე g-ს მიმართ წარმოადგენს ბორელის სიმრავლეს E-ში.

ადვილად მოწმდება, რომ თუ f :X → Y და h :Y → Z ბორელის ასახვებია, მაშინ მათი კომპოზიცია $h \circ f: X \to Z$ ასევე ბორელის ასახვაა.

ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება პოლონური სივრცე, თუ ის არის რომელიღაც სრული სეპარაბელური მეტრიკული სივრცის ჰომეომორფული. პოლონური სივრცის სტანდარტულ მაგალითს წარმოადგენს ე.წ. ბერის კანონიკური სივრცე, რომელიც შემდეგნაირად განისაზღვრება. განვიხილოთ ყველა ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლე, აღჭურვილი დისკრეტული ტოპოლოგიით, და ავიღოთ N^N თვლადი ნამრავლი, აღჭურვილი ტიხონოვის ტოპოლოგიით. მას ბერის კანონიკური სივრცე ეწოდება (იხ. [27], [28]).

პოლონურ სივრცეში მდებარე სიმრავლეს ეწოდება ანალიზური (ანუ სუსლინის) სიმრავლე, თუ იგი წარმოადგენს რომელიღაც პოლონური სივრცის უწყვეტ ანასახს.

ზოგჯერ უფრო ხელსაყრელია ანალიზური სიმრავლეების შემდეგი განსაზღვრება: პოლონურ E სივრცეში მდებარე X სიმრავლეს ეწოდება ანალიზური სიმრავლე, თუ არსებობს პოლონური F სივრცე და არსებობს $E \times F$ ტოპოლოგიური ნამრავლის ისეთი ბორელის Z ქვესიმრავლე, რომ X წარმოადგენს Z-ის პროექციას E-ზე.

E-ში მდებარე ყველა ანალიზურ სიმრავლეთა კლასი, როგორც წესი, A(E) სიმბოლოთი აღინიშნება.

დადგინდა, რომ ადგილი აქვს ჩართვას B(E) ⊂A(E). აგრეთვე დადგინდა, რომ E-ში შემავალ ანალიზურ სიმრავლეთა ნებისმიერი თვლადი ოჯახის გაერთიანება და თანაკვეთა ისევ ანალიზური სიმრავლეებია. გარდა ამისა, ანალიზურ სიმრავლეთა თვლადი ოჯახის ტოპოლოგიური ნამრავლი ისევ ანალიზური სიმრავლეა (იხ. [4], [14], [27])

განსხვავებული მდგომარება გვაქვს დამატების ოპერაციის შემთხვევაში, სახელდობრ, ანალიზური სიმრავლის დამატება საზოგადოდ არ წარმოადგენს ანალიზურ სიმრავლეს. სუსლინმა აჩვენა, რომ ადგილი აქვს შემდეგ დებულებას.

თეორემა (სუსლინი). ყოველ არათვლად პოლონურ E სივრცეში არსებობს ანალიზური A სიმრვალე, რომელიც არ ეკუთვნის B(E) ბორელის σ-ალგებრას.

ასეთი A სიმრავლის დამატება E-ში არ არის ანალიზური სიმრავლე.

ამ თეორემის დამტკიცება მოყვანილია შემდეგ წიგნებში [8], [14], [28], [43].

აღსანიშნავია, რომ ანალიზურ სიმრავლეებამდე მივყავართ ძალზე მარტივ ამოცანებს, რომლებსაც გამოკვეთილი გეომეტრიული ხასიათი აქვთ.

ვთქვათ, $\mathbf{R}^n$ სივრცეში მოცემულია ჩაკეტილი A სიმრავლე. ამბობენ, რომ $a \in A$ წერტილი არის მიღწევადი (გარედან), თუ არსებობს $b \in \mathbf{R}^n \setminus A$ წერტილი, რომლისთვისაც

$$[a.b] \cap A = \{a\}.$$

ისმის კითხვა: რა ბუნებისაა A სიმრავლის ყველა მიღწევად წერტილთა სიმრავლე? დავწეროთ ამ სიმრავლის შესაბამისი ლოგიკური ფორმულა. ამისათვის $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ ნამრავლში განვიხილოთ შემდეგი სიმრავლე:

$$P = \{(x, y, z): x \in A, y \in \mathbf{R}^n \setminus A,\ z \in A, z \neq x, \|x - z\| + \|z - y\| = \|x - y\|\}.$$

ადვილად ჩანს, რომ P არის კომპაქტების თვლადი გაერთიანება. ამიტომ მისი პროექცია პირველი ორი თანამამრავლის ნამრავლზე იქნება ასევე კომპაქტების თვლადი გაერთიანება. ეს პროექცია აღვნიშნოთ B სიმბოლოთი. ცხადია, რომ $(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n) \setminus B$ სიმრავლე არის ღია სიმრავლეების თვლადი ოჯახის თანაკვეთა, და ასევე ადვილად მოწმდება, რომ იმავე $(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n) \setminus B$ სიმრავლის პროექცია პირველ თანამამრავლზე სწორედ A-ს მიღწევად წერტილთა სიმრავლეს წარმოადგენს. იგი შეიძლება იყოს საკუთრიავად ანალიზური, ე.ი. არ ეკუთვნოდეს $\mathbf{R}^n$-ის ბორელის σ-ალგებრას.

ანალიზური (სუსლინის) სიმრავლეების დამატებებს კო-ანალიზურ სიმრავლეებს უწოდებენ. ისინიც საკმაოდ ხშირად გვხდება მათემატიკის სხვდასახვა საკითხის კვლევის პროცესში.

თანამედროვე მათემატიკაში ამოზნექილი სიმრავლის კიდურა ანუ ექსტრემალური წერტილის ცნება უაღრესად მნიშვნელოვან როლს თამაშობს. მოვიყვანოთ ამ ცნების განმარტება.

ვთქვათ, E რაიმე ვექტორული სივრცეა ნამდვილ რიცხვთა ველზე და X – ამოზნექილი სიმრავლე E-ში. ამბობენ, რომ X სიმრავლის რაიმე x წერტილი არის X-ის კიდურა წერტილი, თუ არ არსებობს X-ში შემავალი არაგადაგვარებული მონაკვეთი, რომლის შუა წერტილი x-ს ემთხვევა.

ახლა დავუშვათ, რომ X არის E პოლონური ტოპოლოგიური ვექტორული სივრცის ჩაკეტილი ამოზნექილი ქვესიმრავლე. მაშინ X -ის ყველა კიდურა წერტილთა სიმრავლე არის კო-ანალიზური E-ში.

ლიტერატურაში ინტენსიურად იყო შესწავლილი ბორელის და ანალიზური სიმრავლეების ე.წ. რეგულარობის თვისებები, აქ იგულისხმება შემდეგი ფაქტების დადგენა:

(1) მოცემული წერტილოვანი სიმრავლის სიმძლავრის ზუსტი მნიშვნელობის პოვნა;
(2) მოცემულ წერტილოვან სიმრავლეში არაცარიელი სრულყოფილი ნაწილის არსებობის დამტკიცება;
(3) მოცემულ წერტილოვან სიმრავლეს გააჩნია თუ არა ბერის თვისება;
(4) მოცემული წერტილოვანი სიმრავლის ზომადობის დამტკიცება რაიმე კონკრეტული ბორელის ზომის გასრულების მიმართ.

ამ მიმართულებით ნაჩვენები იყო, რომ პოლონური სივრცის ყოველ არათვლად ანალიზურ ქვესიმრავლეს აქვს კონტინუუმის სიმძლავრე (იხ [8], [27], [44]). ამრიგად კონტინუუმის ჰიპოთეზა (იხ. §4) რეალიზირებული იქნა ყველა ანალიზურ სიმრავლეთა კლასში. აგრეთვე დამტკიცდა, რომ ყოველ ანალიზურ და კო-ანალიზურ სიმრავლეს აქვს ბერის თვისება (იხ. [8], [27], [44]).

ზომის თეორიის თვალსაზრისით ანალიზური და კო-ანალიზური სიმრავლეების მნიშვნელობა იმითაც აიხსნება, რომ ისინი არიან უნივერსალურად ანუ აბსოლუტურად ზომადი სიმრავლეები ზომათა ძალიან ბუნებრივი კლასის მიმართ (იხ. [6], [8], [27], [44]).

ვთქვათ, მოცემულია E სიმრავლე და ამ სიმრავლეზე განსაზღვრული რაიმე μ ზომა. გავიხსენოთ, რომ რაიმე $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ ფუნქციას ეწოდება ზომადი μ ზომის მიმართ, თუ ნებიემიერი $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ სიმრავლისათვის სრულდება თანაფარდობა

$$f^{-1}(B) \in dom(\mu).$$

ზემოთ მოყვანილი სტანდარტული განსაზღვრება შეიძლება არსებითად განზოგადდეს (იხ. [45]).

M -ით აღვნიშნოთ E სიმრავლეზე გასნასღვრულ ზომათა რაიმე კლასი. საზოგადოდ ვიგულისხმოთ, რომ M კლასში შემავალი ზომები სხვადასხვა σ-ალგებრებზეა განსაზღვრული (კერძო შემთხვევებში ეს $\sigma-$ალგებრები შეიძლება ერთმანეთს ემთხვეოდნენ).

ვიტყვით, რომ $f: E \rightarrow \mathbf{R}$ ფუნქცია ფარდობითად ზომადია M კლასის მიმართ, თუ არსებობს ერთი მაინც $\mu \in M$ ზომა ისეთი, რომ f ფუნქცია ზომადია μ ზომის მიმართ.

თუ ყოველი $\mu \in M$ ზომისათვის f ზომადია μ ზომის მიმართ, მაშინ მას M კლასის მიმართ აბსოლუტურად (ანუ უნივერსალურად) ზომადი ფუნქცია ეწოდება.

თუ f არც ერთი $\mu \in M$ ზომისთვის არ არის ზომადი, მაშინ f-ს აბსოლუტურად არაზომადი ეწოდება M კლასის მიმართ.

M ზომათა კლასის მიმართ ფუნქციის ზომადობა (რაიმე აზრით) ავტომატურად იწვევს სიმრავლის ზომადობის (იმავე აზრით) განსაზღვრას ამავე კლასის მიმართ. ამისათვის საკმარისია განვიხილოთ სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია.

ანალიზური და კო-ანალიზური სიმრავლეები აბსოლუტურად ზომადი სიმრავლეებია $\mathbf{R}$-ზე განსაზღვრული ყველა σ-სასრული ბორელის ზომათა გასრულებების კლასის მიმართ. ეს შედეგი ფაქტობრივად ეკუთვნის ლუზინს (იხ. [6], [27], [8], [43]).

E სიმრავლეზე მოცემულ რაიმე μ ზომას ეწოდება დიფუზიური, თუ E-ს წერტილებზე მისი მნიშვნელობა ნულის ტოლია.

$M(E)$-თი აღვნიშნოთ ყველა არანულოვანი σ-სასრულო დიფუზიური ზომების კლასი E სიმრავლეზე.

X ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება უნივერსალურად ნულზომადი (ანუ აბსოლუტურად ნულზომადი), თუ მასზე არ შეიძლება განისაზღვროს არანულოვანი σ-სასრულო დიფუზიური ბორელის ზომა.

მართებულია შემდეგი დებულება (იხ. [45]).

დებულება 1. ფუნქცია $f: E \to \mathbf{R}$ აბსოლუტურად არაზომადია $M(E)$ კლასის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა შესრულებულია შემდეგი პირობები:

(1) ყოველი $t \in \mathbf{R}$ წერტილისათვის $f^{-1}(t)$ სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია;
(2) f ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე $ran(f)$ უნივერსალურად ნულზომადია.

ამ თეორემიდან ჩანს, რომ თუ E არათვლადია და f აბსოლუტურად არაზომადია $M(E)$ კლასის მიმართ, მაშინ $ran(f)$ სიმრავლეც აუცილებლად ინდა იყოს არათვლადი. ამიტომ, ბუნებრივად დაისმის კითხვა, ZFC თეორიის ფარგლებში არსებობს თუ არა $\mathbf{R}$-ის არათვლადი უნივერსალურად ნულზომის ქვესიმრავლე. პასუხი ამ კითხვაზე დადებითია, მაგრამ ასეთი ქვესიმრავლის ამჟამად ცნობილი კონსტრუქციები საკმაოდ რაფინირებულია და ამორჩევის აქსიომის არათვლად ფორმებს ეყრდნობა (იხ. [6], [27], [30], [44],). გარდა ამისა დადგინდა, რომ ZFC თეორიის გარკვეულ მოდელში, სადაც კონტინუუმის ჰიპოთეზა მცდარია, $\mathbf{R}$-ის ნებისმიერი უნივერსალურად ნულზომადი ქვესიმრავლის სიმძლავრე ω_1-ს არ აღემატება.

ბორელის, ანალიზური და კო-ანალიზური სიმრავლეების კვლევის პროცესში ძირითადად ამორჩევის აქსიომის თვლადი ფორმა გამოიყენება ან უკიდურეს შემთხვევაში DC აქსიომა.

შედარებით რთული ბუნების სიმრავლეები კი უკვე ამორჩევის აქსიომის არათვლადი ფორმების გამოყენებით აიგება. მაგალითად, ამ გზით მიიღება

ლებეგის აზრით არაზომადი წერტილოვანი სიმრავლე და არათვლადი უნივერსალურად ნილზომადი წერტილოვანი სიმრავლე.

როგორც უკვე ითქვა §2-ში, 1905 წელს ვიტალის მიერ პირველად იქნა აგებული ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლის მაგალითი $\mathbf{R}$-ზე. როგორც ცნობილია, ვიტალის სიმრავლე არის $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ ფაქტორ-ჯგუფის ნებისმიერი სელექტორი. აღსანიშნავია, რომ ვიტალის სიმრავლეების რაოდენობა 2^{c}-ს ტოლია, სადაც c კონტინუუმის სიმძლავრეა.

პარადოქსალური წერტილოვანი სიმრავლეების სხვა მაგალითს გვაძლევს ბერნშტეინის სიმრავლე, რომელიც 1908 წელს ბერნშტეინის მიერ იყო აგებული (იხ. [22]) და შემდეგნაირად განიმარტება:

$\mathbf{R}$-ის X ქვესიმრავლეს ბერნშტეინის სიმრავლე ეწოდება, თუ X-იც და მისი დამატებაც თანაიკვეთებიან ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ყოველ არაცარიელ სრულყოფილ ქვესიმრავლესთან.

მეორენაირად ეს განსაზღვრება შეგვიძლია ასე ჩამოვაყალიბოთ:

$\mathbf{R}$-ის X ქვესიმრავლეს ბერნშტეინის სიმრავლე ეწოდება, თუ არც X და არც მისი დამატება არ შეიცავს არც ერთ არაცარიელ სრულყოფილ სიმრავლეს.

ნებისმიერი ბერნშტეინის სიმრავლე არის ლებეგის აზრით არაზომადი, კონნტინუუმის სიმძლავრის და არ გააჩნია ბერის თვისება (იხ. [6], [27], [29],[30], [46]).

ბერნშტეინის სიმრავლე, ისევე როგორც ვიტალის სიმრავლე, აიგება ამორჩევის აქსიომის არათვლადი ფორმების გამოყენებით. უფრო მეტიც, ბერნშტეინის სიმრავლის ასაგებად გამოიყენება ტრანსფინიტური რეკურსიის მეთოდი.

ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიის კვლევისას არსებით როლს თამაშობს $\mathbf{R}$ რიცხვითი ღერძის ჰამელის ბაზისი.

1905 წელს გ. ჰამელმა (იხ. [23]) განიხილა $\mathbf{R}$, როგორც ვექტორული სივრცე Q ველზე და ააგო $\mathbf{R}$ წრფის ჰამელის ბაზისები. ჰამელის ბაზისების აგება შესაძლებელი გახდა ვექტორული სივრცის ზოგად თეორემაზე დაყრდნობით: ყოველ ვექტორულ სივრცეს გააჩნია ბაზისი, ანუ ამ სივრცის ყოველი ელემენტის წარმოდგენა ცალსახად შეიძლება ბაზისის ელემენტების წრფივი კომბინაციის საშუალებით (ეს თეორემა ჩვეულებრივ ცორნის ლემის გამოყენებით მტკიცდება).

განვიხილოთ წრფე, როგორც ვექტორული სივრცე $\mathbf{Q}$ რაციონალურ რიცხვთა ველზე. შემდეგ, უკვე ნახსენები თეორემის გამოყენებით მივიღებთ, რომ არსებობს $\mathbf{R}$-ის ბაზისი Q-ზე. ასეთ ბაზის ეწოდება $\mathbf{R}$ სივრცის ჰამელის ბაზისი. სწორედ ჰამელის ბაზისების საშუალებით იგება კოშის ფუნქციონალური განტოლების

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad (x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R})$$

ე.წ. არატრივიალური ამონახსნი.

ჰამელის ბაზისის არსებობიდან ადვილად გამომდინარეობს ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლის არსებობა **R** ღერძზე (იხ. [14], [25], [26], [47]).

დებულება 2. არსებობს კოშის ფუნქციონალური განტოლების არატრივიალური ამონახსნი.

დამტკიცება: დავუშვათ $\{e_i : i \in I\}$ არის **R** -ის ჰამელის ბაზისი. როგორც აღვნიშნეთ, ყოველი $x \in \mathbf{R}$ ელემენტის წარმოდგენა შეგვიძლია შემდეგი სახით

$$x = \sum_{i \in I} q_i(x) \cdot e_i \quad (q_i(x) \in \mathbf{Q}),$$

სადაც მხოლოდ სასრული რაოდენობა $q_i(x)$ განსხვავდება ნულისაგან.

დავაფიქსიროთ რაიმე $i_0 \in I$ ინდექსი და განვსაზღვროთ ფუნქცია

$$\varphi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

შემდეგი ფორმულით:

$$\varphi(x) = q_{i_0}(x) \qquad (x \in \mathbf{R}).$$

ცხადია, რომ φ აკმაყოფილებს კოშის ფუნქციონალურ განტოლებას. ამის გარდა, φ ფუნქციის მნიშვნელობათა სიმრავლე შედის **Q** -ში. აგებული ფუნქცია არ არის მუდმივი, რადგან

$$\varphi(0) = 0, \qquad \varphi(e_{i_0}) = 1.$$

მაშასადამე, φ არ არის უწყვეტი ფუნქცია.

დებულება 3. დავუშვათ, f არის კოშის ფუნქციონალური განტოლების ამონახსნი, მაშინ შემდეგი ორი წინადადება არის ექვივალენტური:

(1) მოცემული f ფუნქციის გრაფიკი არის ყველაგან მკვრივი $\mathbf{R}^2$ სიბრტყეში;
(2) f არის არატრივიალური ამონახსნი კოშის ფუნქციონალური განტოლების.

დებულება 4. კოშის ფუნქციონალური განტოლების არატრივიალური ამონახსნი არის ლებეგის აზრით არაზომადი.

ზემოთ მოყვანილი თეორემების გათვალისწინებით $ZF\&DC$ თეორიაში მტკიცდება შემდეგი იმპლიკაცია:

(არსებობს ჰამელის ბაზისი **R**-ზე) $\Rightarrow$ (არსებობს **R**-ის ლებეგის აზრით არაზომადი ქვესიმრავლე).

ცნობილია შემდეგი ფაქტი, რომ თუ არსებობს იზომორფიზმი **R** ჯგუფისა $\mathbf{R}^2$ ჯგუფზე, მაშინ ეს იზომორფიზმი იძლევა კოშის ფუნქციონალური განტოლების არატრივიალურ ამონახსნს. მოვიყვანოთ ჩვენს მიერ მიღებული გაცილებით უფრო ზოგადი დებულება.

თეორემა 2. თუ f არის ადიტიური ასახვა

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\,, \qquad f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2,$$

რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლე შეიცავს ერთ წრფეზე არამდებარე 3 წერტილს, მაშინ f მოგვცემს კოშის ფუნქციონალური განტოლების არატრივიალურ ამონახსნს.

დამტკიცება. ვთქვათ, არსებობს f ადიტიური ასახვა

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$\mathbf{R}$ ჯგუფისა $\mathbf{R}^2$ ჯგუფში, ისეთი რომ, მისი მნიშვნელობათა სიმრავლე შეიცავს ერთ წრფეზე არამდებარე სამ წერტილს,

ცხადია f წარმოადგენს ფუნქციათა წყვილს $f = (f_1, f_2)$, სადაც

$$f_1\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f_1 = pr_1 \circ f, \quad pr_1\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R},$$

$$f_2\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f_2 = pr_2 \circ f, \quad pr_2\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}.$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ე.ი. ვთქვათ f_1 და f_2 ორივე ფუნქცია წარმოადგენს კოშის ფუნქციონალური განტოლების ტრიავიალურ ამონახსნებს. მაშინ

$$f_1(x) = c_1 x \ \ (c_1 \neq 0)$$

და

$$f_2(x) = c_2 x \ \ (c_2 \neq 0)$$

და თავად f ფუნქცია კი იქნება შემდეგი სახის ასახვა:

$$x \to (c_1 x, c_2 x) \qquad (x \in \mathbf{R}),$$

რაც, თავის მხრივ, გვიჩვენებს, რომ f ფუნქციის მნიშვნელობათა არე არის წრფე, მოცემული $y = \frac{c_2}{c_1} x$ განტოლებით. აქედან ცხადია, რომ f ფუნქციის მნიშვნელობათა არე არ შეიცავს ერთ წრფეზე არამდებარე სამ წერტილს, ანუ მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე, ან f_1 ან f_2 წარმოადგენს კოშის ფუნქციონალური განტოლების არატრივიალურ ამონახსნს, რაც გვაძლევს ლებეგის აზრით არაზომად სიმრავლესაც ღერძზე.

ზემოთ დამტკიცებული თეორემიდან მარტივად გამომდინარეობს შემდეგი ფაქტები.

დებულება 5. თუ f ადიტიური ასახვა $\mathbf{R}$ ჯგუფიდან $\mathbf{R}^2$ ჯგუფზე არის იზომორფიზმი, მაშინ ეს იზომორფიზმი გვაძლებს $f(x+y) = f(x) + f(y)$ კოშის ფუნქციონალური განტოლების არატრივიალურ ამონახსნს.

დებულება 6. თუ f არის ადიტიური ასახვა

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\,, \qquad f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2,$$

რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლე არ არის ლებეგის აზრით ნულზომის სიმრავლე $\mathbf{R}^2$-ში (ან არ არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე $\mathbf{R}^2$-ში), მაშინ ის იძლევა კოშის ფუნქციონალური განტოლების არატრივიალურ ამონახსნს.

თეორემა 3. (ა) არსებობს წერტილოვანი სიმრავლე, რომელიც ერთდროულად არის ვიტალის სიმრავლე და ბერნშტეინის სიმრავლეც;

(ბ) არსებობს ისეთი სიმრავლე, რომელიც ერთდროულად არის ბერნშტეინის სიმრავლე და ჰამელის ბაზისიც;

(გ) არ არსებობს ისეთი სიმრავლე $\mathbf{R}$-ში, რომელიც ერთდროულად შეიძლება იყოს ვიტალის სიმრავლე და ჰამელის ბაზისი.

დამტკიცება. (ა) დავუშვათ, რომ α არის უმცირესი ორდინალური რიცხვი, რომლისთვისაც $card(\alpha) = \mathbf{c}$ და განვიხილოთ $\mathbf{R}$-ის ყველა არათვლად ჩაკეტილ სიმრავლეთა ოჯახი $\{F_\xi : \xi < \alpha\}$, ინიექციური მიმდევრობის სახით.

ბერნშტეინის სიმრავლის კონსტრუქციის მსგავსად ტრანსფინიტული ინდუქციის მეთოდით ავაგოთ $\{x_\xi : \xi < \alpha\} \subset \mathbf{R}$ წერტილთა ინიექციური ოჯახი. დავუშვათ, რომ $\beta < \alpha$ ორდინალისათვის უკვე აგებულია $\{x_\xi : \xi < \beta\}$ მიმდევრობა.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$Z_\beta = \cup \{x_\xi + \mathbf{Q} : \xi < \beta\},$$

სადაც $\mathbf{Q}$, როგორც ყოველთვის, ყველა რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეა. ცხადია, რომ

$$card(Z_\beta) \le card(\beta) \cdot \omega < \mathbf{c}$$

რადგან $card(F_\beta) = \mathbf{c}$, ამიტომ

$$F_\beta \backslash Z_\beta \neq \emptyset.$$

ავიღოთ ნებისმიერი $z \in F_\beta \backslash Z_\beta$ ელემენტი და აღვნიშნოთ $x_\beta = z$. აღწერილი პროცესის მეშვეობით $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$ წერტილთა მიმდევრობა აგებულია.

ახლა თუ შემოვიღებთ აღნიშვნას $X' = \{x_\xi : \xi < \alpha\}$, მაშინ X' სიმრავლის აგებიდან გამომდინარეობს, რომ ვიტალის დაყოფის ყოველი ეკვივალენტურობის კლასი $x + \mathbf{Q}$ $(x \in \mathbf{R})$ შეიცავს არაუმეტეს ერთ წერტილს X'-დან.

განვიხილოთ იმ ეკვივალენტობის კლასების ოჯახი, რომლებიც $X' + \mathbf{Q}$ სიმრავლესთან არ იკვეთებიან. Z-ით აღვნიშნოთ ამ უკანასკნელი ოჯახის სელექტორი და, საბოლოოდ, განვიხილოთ

$$V = X' \cup Z$$

სიმრავლე. აგებიდან გამომდინარეობს, რომ V არის ვიტალის სიმრავლე.

ვაჩვენოთ, რომ მიღებული V სიმრავლე ნამდვილად ბერნშტეინის სიმრავლეა.

მართლაც ვინაიდან $X' \subset V$, ვღებულობთ, რომ V თანაიკვეთება ყოველ არაცარიელ სრულყოფილ სიმრავლესთან $\mathbf{R}$-ში.

ახლა ავიღოთ რაიმე არანულოვანი ელემენტი $\mathbf{Q}$-დან და განვიხილოთ სიმრავლე $V + q$.

ცხადია, $(V+q) \cap V = \emptyset$ და $V + q \subset \mathbf{R}$.

ავიღოთ ნებისმიერი არათვლადი ჩაკეტილი სიმრავლე $F \subset \mathbf{R}$. ჩაკეტილი არათვლადი სიმრავლე იქნება ასევე $F - q$ სიმრავლეც. აგების თანახმად, $(F-q) \cap V \neq \emptyset$. ამიტომ

$$q + ((F-q) \cap V) \neq \emptyset$$

ნუ, რაც იგივეა,

$$F \cap (V+q) \neq \emptyset,$$

ე.ი. V არის ბერნშტეინის სიმრავლე, რ.დ.გ.

(ბ) ვთქვათ α არის უმცირესი ორდინალი, რომლისთვისაც $card(\alpha) = c$, ხოლო $\{F_\xi : \xi < \alpha\}$ არის $\mathbf{R}$ ღერძის ყველა არათვლად ჩაკეტილ სიმრავლეთა ოჯახი.

ტრანსფინიტური რეკურსიის მეთოდის გამოყენებით განვსაზღვროთ $\{e_\xi : \xi < \alpha\} \subset \mathbf{R}$ წერტილთა ოჯახი.

დავუშვათ, რომ $\xi < \alpha$ ორდინალისთვის აგებულია $\{e_\zeta : \zeta < \xi\}$ მიმდევრობა და ამ მიმდევრობაზე მოვდოთ ვექტორული სივრცე $\mathbf{Q}$-ზე ე.ი. მივიღებთ $lin_{\mathbf{Q}}\{e_\zeta : \zeta < \xi\}$ სიმრავლეს.

ცხადია, რომ

$$card\big(lin_Q\{e_\zeta : \zeta < \xi\}\big) \leq card(\xi) + \omega < c.$$

მაშასადამე,

$$F_\xi \setminus (lin_Q\{e_\zeta : \zeta < \xi\}) \neq \emptyset$$

და შეგვიძლია ავიღოთ წერტილი

$$e_\xi \in F_\xi \setminus \big(lin_Q\{e_\zeta : \zeta < \xi\}\big).$$

აგებული წერტილთა სიმრავლე $\{e_\xi : \xi < \alpha\}$ გავაფართოვოთ H ჰამელის ბაზისამდე ცორნის ლემის გამოყენებით. და აღვნიშნოთ მიღებული სიმრავლე H-ით. აგებიდან გამომდინარეობს, რომ $H \cap F_\xi \neq \emptyset$ ყოველი $\xi < \alpha$ ორდინალისთვის.

ვაჩვენოთ, რომ H-ის დამატება თანაიკვეთება ნებისმიერ არათვლად ჩაკეტილ სიმრავლესთან.

ადვილად მოწმდება (იხ. წინა თეორემის დამტკიცება), რომ არსებობს $h \in \mathbf{R}$ ისეთი, რომ

$$(h+H) \cap H = \emptyset\,.$$

ვთქვათ, F არის ნებისმიერი არათვლადი ჩაკეტილი სიმრავლე $\mathbf{R}$-ზე, მაშინ $F-h$ ასევე იქნება არათვლადი ჩაკეტილი სიმრავლე $\mathbf{R}$-ზე. H-ის განსაზღვრის თანახმად, გვაქვს

$$(F-h) \cap H \neq \emptyset.$$

ამიტომ

$$h + \big((F-h) \cap H\big) \neq \emptyset$$

ანუ, რაც იგივეა,

$$F \cap (H+h) \neq \emptyset.$$

ეს კი უშუალოდ იძლევა, რომ $F \cap (\mathbf{R} \setminus H) \neq \emptyset$, ე.ი. H არის ბერნშტეინის სიმრავლე, რ.დ.გ.

(გ) როგორც ცნობილია თუ მოცემული გვაქვს V ვიტალის სიმრავლე მაშინ სამართლიანია ტოლობა

$$\bigcup_{q \in Q} (V+q) = \mathbf{R}.$$

დავუშვათ, რომ არსებობს ისეთი $H = \{e_\xi : \xi \in \Xi\}$ ჰამელის ბაზისი, რომელიც ამავდროულად არის ვიტალის სიმრავლე.

მაშინ ზემოთ ნათქვამის თანახმად, იარსებებს $\{h_n\}$ წერტილთა მიმდევრობა, რომლისთვისაც

$$\bigcup_n (H+h_n) = \mathbf{R}.$$

ამ მიმდევრობის თითოეული წევრი წარმოვადგინოთ H ბაზისის წრფივი კომბინაციით. თითოეულ ასეთ კომბინაციაში შედის სასრული რაოდენობა H-ის ელემენტები, ე.ი. ყველა h_n-ების წარმოდგენებში მონაწილე H-ის ელემენტების რაოდენობა არაუმეტეს თვლადია. ვინაიდან $card(H) = c$, იმავე H-ის დარჩენილ ნაწილში დავაფიქსიროთ e_{ξ_0} ელემენტი და განვიხილოთ $h = 2e_{\xi_0}$.

დავუშვათ, რომ $h \in \bigcup_n (H+h_n)$, ე.ი. $h = e_\xi + h_n$ რომელიღაც n-სთვის, ანუ

$$2e_{\xi_0} = e_\xi + q_{i_1} e_{\xi_1} + q_{i_2} e_{\xi_2} + \cdots + q_{i_n} e_{\xi_n}.$$

ამრიგად, e_{ξ_0} განსაზღვრის თანახმად, შესაძლებელია მხოლოდ ორი შემთხვევა:

1. $\xi_0 = \xi$, მაშინ

$$2e_{\xi_0} = e_{\xi_0} + q_{i_1}e_{\xi_1} + q_{i_2}e_{\xi_2} + \dots + q_{i_n}e_{\xi_n.},$$

$$e_{\xi_0} = q_{i_1}e_{\xi_1} + q_{i_2}e_{\xi_2} + \dots + q_{i_n}e_{\xi_n.}$$

რაც წინააღმდეგობაში მოდის H ჰამელის ბაზისის განსაზღვრასთან.

2. $\xi_0 \neq \xi$, მაშინ ვღებულობთ

$2e_{\xi_0} = e_{\xi} + q_{i_1}e_{\xi_1} + q_{i_2}e_{\xi_2} + \dots + q_{i_n}e_{\xi_n}$,

საიდანაც

$$e_{\xi_0} = \frac{e_\xi}{2} + \frac{q_{i_1}}{2}e_{\xi_1} + \frac{q_{i_2}}{2}e_{\xi_2} + \dots + \frac{q_{i_n}}{2}e_{\xi_n},$$

ეს ტოლობაც კი წინააღმდეგობაში მოდის ჰამელის ბაზისის განსაზღვრებასთან.

ანუ ორივე შემთხვევაში მივიღეთ წინააღმდეგობა, მაშასადამე

$$h \notin \bigcup_n (H + h_n),$$

რაც იმის მაჩვენებელია, რომ H არ შეიძლება იყოს ვიტალის სიმრავლე, რ.დ.გ.

§4. კონტინუუმის ჰიპოთეზა და მისი ზოგიერთი გამოყენება ლებეგის ზომის თეორიაში

კანტორის კლასიკური თეორემის თანახმად, თუ გვაქვს კარდინალურ რიცხვთა რაიმე ოჯახი, მაშინ ამ ოჯახის გაერთიანების ბულეანის სიმძლავრე მკაცრად მეტია ოჯახის ნებისმიერი წევრის სიმძლავრეზე. მაშასადამე, აქ გვაქვს კონკრეტული ოპერაცია, რომელიც ოჯახის ნებისმიერი წევრის შესაბამის კარდინალზე გაცილებით უფრო დიდ კარდინალს იძლევა. ამ გზაზე მიიღება სუსტად მიუღწევადი და ძლიერად მიუღწევადი კარდინალური რიცხვები (იხ. [8],[14],[32]). ბულეანის ოპერაციასთან დაკავშირებით კანტორის დროიდან დგას შემდეგი საკითხი: არსებობს თუ არა კარდინალური რიცხვი, რომელიც ω-სა და c რიცხვებს შორისაა მოთავსებული?

კანტორის მიერ დასმული ეს საკითხი წარმოადგენს კონტინუუმის პრობლემას, რომელზეც დადებითი პასუხი კონტინუუმის ჰიპოთეზის სახელითაა ცნობილი.

კონტინუუმის ჰიპოთეზა: $c = 2^{\omega} = card(\mathbf{R}) = \omega_1$.

კონტინუუმის ჰიპოთეზა ლიტერატურაში, როგორც წესი, CH სიმბოლოთი აღინიშნება.

განზოგადოებული კონტინუუმის ჰიპოთეზა: $2^{\omega_{\alpha}} = \omega_{\alpha+1}$, სადაც α ნებისმიერი ორდინალური რიცხვია.

განზოგადოებული კონტინუუმის ჰიპოთეზა GCH სიმბოლოთი აღინიშნება.

თანამედროვე მათემატიკაში ცნობილია, რომ ZFC თეორია თავსებადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა თავსებადია შემდეგი თეორიები:

1. $ZFC \,\&\, GCH$
2. $ZFC \,\&\,$ CH-ის უარყოფა.

აგრეთვე ცნობილია, რომ ZFC თეორია თავსებადია, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა თავსებადია შემდეგი თეორიები:

ა) $ZFC \,\&\, c$ არის რეგულარული კარდინალი;
ბ) $ZFC \,\&\, c$ არის სინგულარული კარდინალი.

ზემოთ ჩამოთვლილი ფაქტების შესახებ იხ. ([6], [8], [9], [14], [32]).

ვთქვათ, a არის რაიმე უსასრულო კარდინალური რიცხვი.

ამბობენ, რომ a არის სინგულარული კარდინალური რიცხვი, თუ არსებობს a-ზე მკაცრად ნაკლები კარდინალების ოჯახი, რომლის სიმძლავრე აგრეთვე ნაკლებია a-ზე, მაგრამ ამ ოჯახის წევრების ჯამი უდრის a-ს.

ამბობენ, რომ a არის რეგულარული კარდინალური რიცხვი, თუ ის არ არის სინგულარული.

როგორც ცნობილია, AC -ს დაშვებით ნებისმიერი უსასრულო კარდინალი ჩაიწერება ω_α სახით, სადაც α არის გარკვეული ორდინალური რიცხვი. ასეთი წარმოდგენის შესაძლებლობა მარტივად მიიღება ტრანსფინიტური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით. ცხადია, რომ უმცირესი უსასრულო კარდინალი $\omega = \omega_0$ არის რეგულარული. აგრეთვე მარტივად მტკიცდება, რომ ყოველი $\omega_{\alpha+1}$ სახის კარდინალიც არის რეგულარული. მეორეს მხრივ, ადვილი შესამოწმებელია, რომ თვლადი ჯამი

$$\omega_\omega = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n + \cdots$$

წარმოადგენს უმცირეს სინგულარულ კარდინალს. ადგილი აქვს უფრო ზოგად ფაქტსაც, სახელდობრ, თუ ორდინალური რიხვი α არის ω-ს კოფინალური, მაშინ ω_α კარდინალი სინგულარულია.

გარკვეული ტიპის დიდი კარდინალური რიცხვების არსებობის დაშვებით, მ. გიტიკმა აჩვენა, რომ შესაძლებელია ZF თეორიის ისეთი მოდელის არსებობა, რომელშიც ნებისმიერი არათვლადი კარდინალი არის ω -ს კოფინალური და, მაშასადამე არის სინგულარულიც (იხ. [48]). აქ ხაზი უნდა გაესვას ერთ ნიუანსს. გავიხსენოთ, რომ ZF თეორიის ფარგლებში შეუძლებელია ყველა სიმძლავრის სადარობის დადგენა. მაგალითად, ამ თეორიაში ω_1-ს და c-ს ერთმანეთთან ვერ შევადარებთ (იხ. §2). ამიტომ გიტიკის აღნიშნული შედეგი ეხება მხოლოდ ისეთ სიმძლავრეებს ანუ კარდინალურ რიცხვებს, რომლებიც არიან ბიექციურ თანადობაში სავსებით დალაგებულ სიმრავლეებთან.

ამბობენ, რომ ω_α არის სუსტად მიუღწევადი კარდინალი, თუ იგი რეგულარულია და მისი ინდექსი α არის ზღვარითი ორდინალი.

ამბობენ, რომ ω_α არის ძლიერად მიუღწევადი კარდინალი, თუ იგი სუსტად მიუღწევადია და ყოველი $b < \omega_\alpha$ კარდინალური რიცხვისთვის გვაქვს $2^b < \omega_\alpha$.

დებულება 7. განზოგადოებული კონტინუუმის ჰიპოთეზის დაშვებით ყოველი სუსტად მიუღწევადი კარდინალური რიცხვი არის იმავე დროს ძლიერად მიუღწევადიც.

ამ დებულების დამტკიცება იხ., მაგალითად, [3], [13], [14].

როგორც უკვე აღვნიშნეთ (იხ. §1), თუ a არის ძლიერად მიუღწევადი კარდინალური რიცხვი, მაშინ ფონ ნეიმანის უნივერსუმის V_a სიმრავლე წარმოადგენს ZFC თეორიის მოდელს.

ართვლად a კარდინალურ რიცხვს ეწოდება ზომადი, თუ არსებობს ერთი მაინც $\mu: P(a) \to \{0,1\}$ ალბათური ზომა, რომელიც ღებულობს ნულის ტოლ მნიშვნელობებს a-ს ყველა ერთელემენტიან ნაწილზე და, იმავე დროს, არის a-ადიტიური.

a -ადიტიურობა ნიშნავს შემდეგს: როგორიც არ უნდა იყოს μ -ნულზომის სიმრავლეთა $\{X_i: i \in I\}$ ოჯახი ისეთი, რომ $card(I) < a$, ამ ოჯახის გაერთიანება აგრეთვე μ-ნულზომისაა.

ბუნებრივია, არათვლად კარდინალურ რიცხვს არაზომადი ეწოდება, თუ იგი არ არის ზომადი. ამ ცნებების შესახებ უფრო დაწვრილებით იხ. [4], [8], [14], [32].

ცნობილია შემდეგი კლასიკური დებულება (იხ. [8],[14],[32]).

თეორემა (ულამი): პირველი ზომადი კარდინალი არის ძლიერად მიუღწევადი.

ზემოთ ჩვენ მოვიყვანეთ დიდ კარდინალურ რიცხვთა იერარქიის რამდენიმე წარმომადგენლის განმარტება. რასაკვირველია, ამ იერარქიაში არსებობს მრავალი სხვა წარმომადგენელი, რომლებიც მნიშვნელოვანია მათემატიკური ლოგიკის, სიმრავლეთა თეორიის, ტოპოლოგიის, ზოგადი ალგებრისა და ფუნქციონალური ანალიზის კონკრეტული საკითხებისათვის (იხ. [6], [8], [32]).

განვიხილოთ [0,1] სეგმენტი და მასზე მოცემული ლებეგის კლასიკური ზომა, რომელიც μ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ. ცნობილია, რომ ამავე სეგმენტზე გვაქვს სიმრავლეები, რომლებიც არაზომადია μ -ს მიმართ (მაგალითად, ვიტალის სიმრავლეები ან ბერნშტეინის სიმრავლეები). ეს გარემოება μ ზომის გარკვეულ ნაკლოვანებაზე მიუთითებს. აგრეთვე ცნობილია, რომ [0,1]-ზე შეგვიძლია განვსაზღვროთ მთელი რიგი ზომებისა, რომლებიც μ-ს საკუთრივად აგრძელებენ (იხ. [7], [49]). ამასთან დაკავშირებით თავის დროზე დაისვა კითხვა:

შეიძლება თუ არა μ ისე გაგრძელდეს, რომ [0,1]-ში შემავალი ყველა წერტილოვანი სიმრავლე აღმოჩნდეს ზომადი მიღებული გაგრძელების მიმართ?

სამწუხაროდ, ეს ბუნებრივი და მათემატიკური ანალიზისთვის უაღრესად მნიშვნელოვანი კითხვა ვერ პოულობს პასუხს ZFC თეორიის ფარგლებში. ერთის მხრივ, კონტინუუმის ჰიპოთეზის დაშვებით ბანახისა და კურატოვსკის მიერ დადგინდა, რომ [0,1] სეგმენტზე აღნიშნული “უნივერსალური” ზომა არ არსებობს (იხ. [50]). მეორეს მხრივ, სოლოვეიმ [5] აჩვენა, რომ აღნიშნული “უნივერსალური” ზომის არსებობის პრობლემა უშუალოდ უკავშირდება დიდი კარდინალური რიცხვების არსებობის საკითხს.

განვიხილოთ შემდეგი ორი თეორია:

(1) ZFC & (არსებობს [0,1]-ზე მოცემული μ ლებეგის ზომის უნივერსალური გაგრძელება);
(2) ZFC & (არსებობს ზომადი კარდინალი).

სოლოვეის ერთ-ერთი შესანიშნავი შედეგის თანახმად, (1) თეორია არაწინააღმდეგობრივია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა (2) თეორია არის არაწინააღმდეგობრივი (იხ. [4], [8]).

მათემატიკური თეორიების შესწავლისას კონტინუუმის ჰიპოთეზაზე დაყრდნობით მრავალი სანტერესო ობიექტი აიგება. ასეთი ობიექტების მნიშვნელოვანი მაგალითებია ლუზინის სიმრავლეები და სერპინსკის სიმრავლეები.

პირველ რიგში განვიხილოთ ლუზინის სიმრავლე, რომელიც ლუზინის მიერ იქნა აგებული 1914 წელს კონტინუუმის ჰიპოთეზაზე დაყრდნობით. ლუზინის სიმრავლეები მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ ნამდვილ ფუნქციათა თეორიაში და ზომის კლასიკურ თეორიაში.

განვსაზღვროთ ლუზინის სიმრავლე:

ვიტყვით, რომ $X \subset \mathbf{R}$ სიმრავლე არის ლუზინის სიმრავლე, თუ:

(1) X არის არათვლადი სიმრავლე;
(2) ყოველი პირველი კატეგორიის Y სიმრავლისთვის $\mathbf{R}$-დან, $X \cap Y$ სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.

ცნობილია, რომ $\mathbf{R}$ ღერძის ყველა ლუზინის ქვესიმარავლე წარმოქმნის საკუთრივ σ-იდეალს (იხ. [25], [26], [29], [30]).

აღვნიშნოთ, რომ ლუზინის სიმრავლის არსებობის დამტკიცება შეუძლებელია მხოლოდ ZFC თეორიის ფარგლებში. მეორეს მხრივ, იმისათვის რომ ვაჩვენოთ ლუზინის სიმრავლის არსებობა, საკმარისია მივიღოთ კონტინუუმის ჰიპოთეზა.

თეორემა (ლუზინი). თუ მივიღებთ კონტიუნუუმის ჰიპოთეზას, მაშინ არსებობს ლუზინის სიმრავლე $\mathbf{R}$ ღერძზე.

ეს კლასიკური თეორემა მტკიცდება ტრანსფინიტური ინდუქციის მეშვეობით. ჩვენს მიერ მოდიფიცირებული იქნა კლასიკური კონსტრუქცია და ნაჩვენებია შემდეგი დებულების სამართლიანობა, რომელიც შემდგომი თეორემების დამტკიცებაში არსებით როლს თამაშობს.

თეორემა 4. კონტინუუმის ჰიპოთეზის დაშვებით არსებობს ისეთი X ლუზინის სიმრავლე $\mathbf{R}$ ღერძზე, რომ

$$X + X = \{x + x' : x \in X,\ x' \in X\} = \mathbf{R}.$$

დამტკიცება. კონტინუუმის ჰიპოთეზის თანახმად: $c = \omega_1$ და შესაბამისად $\mathbf{R}$ სიმრავლის ყველა ბორელის ქვესიმრავლეთა ოჯახის სიმძლავრეა ω_1. ვთქვათ, $\{F_\xi : \xi < \omega_1\}$ არის ყველა არსად მკვრივი ჩაკეტილ სიმრავლეთა ოჯახი $\mathbf{R}$-ზე. ანალოგიურად, $\mathbf{R}$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც $\mathbf{R} = \{r_\xi : \xi < \omega_1\}$.

ტრანსფინიტური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით ავაგოთ ორი $\{x_\xi : \xi < \omega_1\}$ და $\{x'_\xi : \xi < \omega_1\}$ წერტილთა სიმრავლე $\mathbf{R}$-დან, ისეთი რომ $x_\xi + x'_\xi = r_\xi$. დავუშვათ, რომ ξ ორდინალისთვის წერტილთა ნაწილობრივი ოჯახები $\{x_\zeta : \zeta < \xi\}$ და $\{x'_\zeta : \zeta < \xi\}$ უკვე აგებულია. განვიხილოთ სიმრავლეთა ოჯახი $(F_\zeta)_{\zeta<\xi}$ და მათი გაერთიანება $\cup_{\zeta<\xi} F_\zeta$.

ცხადია, რომ არსებობს ნამდვილი რიცხვი

$$x_\xi \notin (\bigcup_{\zeta<\xi} F_\zeta) \cup \{x_\zeta : \zeta < \xi\}$$

მაგრამ, ამასთან ერთად გვინდა, რომ

$$x'_{\xi} = r_{\xi} - x_{\xi} \notin \bigcup_{\zeta<\xi} F_{\zeta}.$$

ჩავატაროთ მარტივი გარდაქმნები და დავწეროთ

$$-r_{\xi} + x_{\xi} \notin -\bigcup_{\zeta<\xi} F_{\zeta},$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$x_{\xi} \notin r_{\xi} - \bigcup_{\zeta<\xi} F_{\zeta}.$$

მიღებული დამოკიდებულებების საფუძველზე შეგვიძლია x_{ξ} შევარჩიოთ ისე, რომ

$$x_{\xi} \notin \left(\bigcup_{\zeta<\xi} F_{\zeta}\right) \cup (r_{\xi} - \bigcup_{\zeta<\xi} F_{\zeta}).$$

მაშასადამე, ტრანსიფინიტური ინდუქციის გამოყენებით $\{x_{\xi}: \xi < \omega_1\}$ და $\{x'_{\xi}: \xi < \omega_1\}$ სიმრავლეები აგებულია

ვაჩვენოთ, რომ $X = \{x_{\xi}: \xi < \omega_1\} \cup \{x'_{\xi}: \xi < \omega_1\}$ სიმრავლე არის ლუზინის სიმრავლე.

აგების კონსტრუქციიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $\zeta < \xi < \omega_1$, მაშინ $x_{\zeta} \neq x_{\xi}$

და, მაშასადამე, გვაქვს ტოლობები $card(X) = c = \omega_1$.

ვთქვათ, Y არის ნებისმიერი პირველი კატეგორიის სიმრავლე, ეს იმას ნიშნავს, რომ რომელიღაც $\xi < \omega_1$ ორდინალისთვის გვაქვს

$$Y \subset \bigcup_{\zeta<\xi} F_{\zeta},$$

ჩვენი კონსტრუქციის მიხედვით აგრეთვე გვექნება

$$\left(\{x'_{\xi}, x'_{\xi+1}, \dots\} \cup \{x_{\xi}, x_{\xi+1}, \dots\}\right) \cap \left(\bigcup_{\zeta<\xi} F_{\zeta}\right) = \emptyset.$$

ამიტომ,

$$X \cap Y \subset X \cap \left(\bigcup_{\zeta<\xi} F_{\zeta}\right) \subset \{x_{\zeta}: \zeta < \xi\} \cup \{x'_{\zeta}: \zeta < \xi\}.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $card(X \cap Y) \leq \omega_1$ ე.ი. X ლუზინის სიმრავლეა.

შემდეგი დებულება გვაჩვენებს, რომ ლუზინის სიმრავლე აბსოლუტურად ნულზომისაა (იხ. [25]).

დებულება 8. ვთქვათ, $X \subset \mathbf{R}$ ლუზინის სიმრავლეა. მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ორ ეკვივალენტურ წინადადებებს:

(1) თუ μ ნებისმიერი σ-სასრული დიფუზიური ბორელის ზომაა X ტოპოლოგიურ სივრცეზე, მაშინ $\mu(X) = 0$;

(2) თუ μ ნებისმიერი σ-სასრული დიფუზიური ბორელის ზომაა $\mathbf{R}$-ზე, მაშინ $\mu^*(X) = 0$.

როგორც უკვე აღინიშნა, თუ მივიღებთ კონტინუუმის ჰიპოთეზას, ლუზინის კლასიკური კონსტრუქციის საშუალებით აიგება ლუზინის სიმრავლე. ამ კონსტრუქციის შემდგომი მოდიფიცირებით შეიძლება აგებული იქნას ისეთი ლუზინის სიმრავლე, რომელიც იმავდროულად იქნება ვექტორული სივრცე $\mathbf{Q}$ ველზე. კერძოდ, ასეთი ლუზინის სიმრავლე იქნება $\mathbf{R}$-ის ქვეჯგუფი (იხ. [25], [44]).

შევნიშნოთ, რომ თუ X არის ლუზინის სიმრავლე, მაშინ $X \cup \mathbf{Q}$ ასევე არის ლუზინის სიმრავლე, სადაც $\mathbf{Q}$ რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეა. მაშასადამე, თუ დავუშვებთ კონტინუუმის ჰიპოთეზას, მაშინ არსებობს ყველგან მკვირივი ლუზინის სიმრავლე $\mathbf{R}$-ში.

ვთქვათ, $X \subset \mathbf{R}$ ლუზინის სიმრავლეა და $X \cup \mathbf{Q}$ სივრცე აღჭურვილია ინდუცირებული ტოპოლოგიით. მაშინ $X \cup \mathbf{Q}$ სივრცეში ყოველი პირველი კატეგორიის სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია და პირიქით, ყოველი არაუმეტეს თვლადი სიმრავლე $X \cup \mathbf{Q}$ სივრცეში პირველი კატეგორიისა.

ლუზინის სიმრავლეების კვლევაში სიახლეს წარმოადგენს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5: (ა) არ არსებობს ლუზინის სიმრავლე, რომელიც იქნება ვიტალის სიმრავლე;

(ბ) არ არსებობს ლუზინის სიმრავლე, რომლიც იქნება ბერნშტეინის სიმრავლე;

(გ) კონტინუუმის ჰიპოთეზის დაშვებით არსებობს ისეთი ლუზინის სიმრავლე, რომელიც ამავდროულად არის ჰამელის ბაზისი.

დამტკიცება. (ა) დავუშვათ არსებობს $X \subset \mathbf{R}$ სიმრავლე, რომელიც ერთდროულად არის ვიტალისა და ლუზინის სიმრავლე.

როგორც ცნობილია, ნებისმიერი X ვიტალის სიმრავლისათვის არსებობს რიცხვითი $\{r_n\}_{n\in N}$ მიმდევრობა, ისეთი, რომ $\cup_n (X + r_n) = \mathbf{R}$.

მეორეს მხრივ, ცნობილია, რომ ყოველი ლუზინის სიმრავლე არის ნულზომადი სიმრავლე μ ნებისმიერი σ-სასრული დიფუზიური ბორელის ზომის გასრულებების მიმართ (კერძოდ, ლებეგის სტანდარტული ზომის მიმართ), ხოლო ნულზომად სიმრავლეთა თვლადი გაერთიანებით შეუძლებელია $\mathbf{R}$ ღერძის დაფარვა. ე.ი. მივიღეთ წინააღმდეგობა. რ.დ.გ.

(ბ) დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ $X \subset \mathbf{R}$ არის ლუზინის სიმრავლე, რომელიც ამავდროულად წარმოადგენს ბერნშტეინის სიმრავლეს.

როგორც უკვე ვთქვით, რომ ყოველი ლუზინის X სიმრავლისათვის თუ μ ნებისმიერი σ-სასრული დიფუზიური ბორელის ზომაა $\mathbf{R}$-ზე, მაშინ $\mu^*(X) = 0$ ანუ, სხვა სიტყვებით, ლუზინის სიმრავლე აბსოლუტურად ნულზომადი სიმრავლეა.

განვიხილოთ X სიმრავლე ლებეგის ზომის მიმართ. რადგან ლუზინის სიმრავლე აბოსოლუტრად ნულზომადი სიმრავლეა ნებისმიერი μ σ-სასრული დიფუზიური ბორელის ზომის გასრულების მიმართ, მაშასადამე X ნულზომადი იქნება ასევე ლებეგის ზომის მიმართაც. რადგან ჩვენი დაშვებით, X სიმრავლე ამასთანავე წარმოადგენს ბერნშტეინის სიმრავლეს, შესაბამისად ვღებულობთ, რომ ბერნშტეინის სიმრავლეც აბსოლუტურად ნულზომადია.

მაგრამ ცნობილია, რომ ბერნშტეინის გარე ზომა ლებეგის ზომის მიმართ $+\infty$, ხოლო ასეთი გარე ზომის მქონე სიმრავლე არ შეიძლება იყოს აბსოლუტურად ნულზომადი, ანუ მივიღეთ წინააღმდეგობა. რ.დ.გ.

(გ) დავუშვათ კონტინუუმ ჰიპოთეზა სამართლიანია. მაშინ, როგორც უკვე ვაჩვენეთ, არსებობს ისეთი X ლუზინის სიმრავლე, რომ $X + X = \{x + x';\ x \in X, x' \in X\} = \mathbf{R}$.

განვსაზღვროთ ჩართვის დამოკიდებულების მიმართ მაქსიმალური Q-ზე წრფივად დამოუკიდებელი სიმრავლე $H \subset X$. ვაჩვენოთ, რომ H არის ჰამელის ბაზისი.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ არსებობს $t \in \mathbf{R}$ ელემენტი ისეთი, რომ H-ზე წრფივად დამოუკიდებელია. მაშინ $t = x + x'$, სადაც x და x' არიან X სიმრავლის რაიმე ელემენტები. ცხადია ან x ან x' არის H-სგან წრივად დამოუკიდებელი. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ x არის ასეთი ელემენტი. მაშინ $H \cup \{x\}$ სიმრავლე არის $\mathbf{Q}$-ზე წრფივად დამოუკიდებელი სიმრავლე, რომელიც შეიცავს H სიმრავლეს და შედის X სიმრავლეში. მივიღეთ წინააღმდეგობა H-ის თავდაპირველ განსაზღვრასთან, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ H არის ჰამელის ბაზისი.

ამასთან, რადგან H არის არათვლადი ქვესიმრავლე X ლუზინის სიმრავლის, მაშასადამე თავად H არის ლუზინის სიმრავლე. რ.დ.გ.

ლუზინის სიმრავლის დუალურ ობიექტს წარმოადგენს სერპინსკის სიმრავლე, რომელიც 1924 წელს სერპინსკის მიერ იქნა აგებული იმავე კონტინუუმის ჰიპოთეზის დაშვებით.

ვიტყვით, რომ $X \subset \mathbf{R}$ არის სერპინსკის სიმრავლე, თუ:

1. X არათვლადია;

2. ყოველი ლებეგის აზრით ნულზომის $Y \subset \mathbf{R}$ სიმრავლისათვის, $X \cap Y$ სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.

სერპინსკიმ აჩვენა შემდეგი დებულების მართებულობა.

თეორემა (სერპინსკი). თუ მივიღებთ კონტინუუმის ჰიპოთეზას, მაშინ **R** -ზე არსებობს სერპინსკის სიმრავლე.

ისევე, როგორც ლუზინის სიმრავლის შემთხვევაში, გავაძლიერეთ სერპინსკის თეორემა სერპინსკის სიმრავლეების შესახებ და ვაჩვენეთ შემდეგი დებულების სამართლიანობა.

თეორემა 6. კონტინუუმ ჰიპოთეზის დაშვებით, არსებობს ისეთი სერპინსკის სიმრავლე X, რომ

$$X + X = \{x + x';\ x \in X, x' \in X\} = \mathbf{R}.$$

ამ თეორემის დამტკიცება ანალოგიურია ლუზინის სიმრავლის არსებობის მტკიცების. მხოლოდ თუ წინა დამტკიცებაში ჩვენ ვიხილავდით პირველი კატეგორიის სიმრავლეთა ოჯახს, ამ შემთხვევაში ლებეგის აზრით ნულზომის სიმრავლეთა ოჯახს ავიღებთ, და ისევ ტრანსფინიტური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით დავამტკიცებთ აღნიშნულ თეორემას.

ზოგიერთ შემთხვევაში შესაძლებელია, რომ არსებობდეს სერპინსკის სიმრავლე **R**-ზე, მაგრამ არ სრულდებოდეს კონტინუუმის ჰიპოთეზა. უფრო მეტიც, არსებობს ZFC -ს ისეთი მოდელები, რომლებშიც კონტინუუმის ჰიპოთეზის უარყოფა მტკიცდება და ამასთან არსებობს კონტინუუმის სიმძლავრის მქონე სერპინსკის სიმრავლე. ანალოგიურ გარემოებას ადგილი აქვს ლუზინის სიმრავლეებისათვისაც.

სერპინსკის სიმრავლეებთან დაკავშირებით დავამტკიცეთ შემდეგი ახალი ფაქტი.

თეორემა 7. (ა) არ შეიძლება, რომ სერპინსკის სიმრავლე იყოს ვიტალის სიმრავლე;

(ბ) არ შეიძლება, რომ სერპინსკის სიმრავლე იყოს ბერნშტეინის სიმრავლე;

(გ) არსებობს ისეთი სერპინსკის სიმრავლე, რომელიც ამავადროულად არის ჰამელის ბაზისი.

დამტკიცება. (ა) დავუშვათ არსებობს $X \subset \mathbf{R}$ სიმრავლე, რომელიც ერთდროულად არის ვიტალისა და სერპინსკის სიმრავლე.

როგორც ცნობილია, ნებისმიერი X ვიტალის სიმრავლისათვის არსებობს რაციონალურ რიცხვთა $\{r_n\}_{n \in N}$ მიმდევრობა, ისეთი, რომ $\cup_n (X + r_n) = \mathbf{R}$.

მეორეს მხრივ, ცნობილია, რომ ყოველი სერპინსკის სიმრავლე არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე და პირველი კატეგორიის სიმრავლეთა თვლადი გაერთიანებით შეუძლებელია **R** ღერძის დაფარვა, ე.ი. მივიღეთ წინააღმდეგობა. რ.დ.გ.

ბ) ახლა დავუშვათ, რომ X სერპინსკის სიმრავლე, ამასთანავე ბერნშტეინის სიმრავლესაც წარმოადგენს.

როგორც ვიცით, ნებისმიერი სერპინსკის სიმრავლე წარმოადგენს პირველი კატეგორიის სიმრავლეს და, მაშასადამე, მისი დამატება შეიცავს არაცარიელ

სრულყოფილ სიმრავლეს (იხ. [29]). რადგან ჩვენი დაშვებით X სიმრავლე ამავდროულად არის ბერნშტეინის სიმრავლე, ე.ი. ბერნშტეინის სიმრავლის დამატება შეიცავს არაცარიელ სრულყოფილ სიმრავლეს, ეს კი ბერნშტეინის სიმრავლის განსაზღვრებას ეწინააღმდეგება, ანუ მივიღეთ წინააღმდეგობა. რ.დ.გ.

(გ) ისევე, როგორც ლუზინის სიმრავლეების შემთხვევაში, გამოვიყენებთ შემდეგი ფაქტის სამართლიანობას: კონტინუუმ ჰიპოთეზის დაშვებით არსებობს ისეთი სერპინსკის სიმრავლე, რომ

$$X + X = \{x + x';\ x \in X, x' \in X\} = \mathbf{R}.$$

შემდეგ, ანალოგიური მსჯელობით, როგორც ლუზინის სიმრავლეების შემთხვევაში, ვაჩვენებთ, რომ არსებობს H ჰამელის ბაზისი, რომელიც ამავდროულად არის სერპინსკის სიმრავლე. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

§5. მარტინის აქსიომა და მისი როლი წერტილოვანი სიმრავლეების კვლევის პროცესში

წინა პარაგრაფებში დაწვრილებით განვიხილეთ სხვადასხვა არატრივიალური წერტილოვანი სიმრავლეები, რომლებიც განსაკუთრებულ როლს თამაშობენ მათემატიკურ ანალიზში და, კერძოდ, ზომის თეორიაში. ასეთი სიმრავლეების ერთ–ერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი მაგალითია ვიტალის სიმრავლე, რომელიც 1905 წელს ვიტალის მიერ იქნა აგებული და რომელიც აიგება ამორჩევის აქსიომის არათვლადი ფორმების გამოყენებით. ვიტალის სიმრავლე წარმოადგენს ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლის ისტორიულად პირველ მაგალითს. ასევე განვიხილეთ ლუზინის სიმრავლეები და სერპინსკის სიმრავლეები, რომელთა არსებობა და აგება კონტინუუმის ჰიპოთეზას მოითხოვს (იხ. §4).

ამ პარაგრაფში კი განვიხილავთ წერტილოვანი სიმრავლეების ისეთ მაგალითებს, რომელთა არსებობა და აგება კონტინუუმის ჰიპოთეზაზე უფრო სუსტ სიმრავლურ-თეორიულ დაშვებას მოითხოვს, კერძოდ კი ე.წ. მარტინის აქსიომას მოითხოვს. (იხ. [8], [26], [31], [32]).

ამჟამად ცნობილია, რომ მნიშვნელოვან დამატებით სიმრავლურ-თეორიულ აქსიომას წარმოადგენს მარტინის აქსიომა, რომელიც ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლეების ტერმინებში ყალიბდება. წინასწარ გავიხსენოთ რამდენიმე განსაზღვრა ნაწილობრივად დალაგებულ სიმრავლეთა თეორიიდან.

ვთქვათ, $(X, \leq)$ ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლეა.

$Y \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება კოინიციალური X-ში, თუ ყოველი $x \in X$ ელემტისათვის მოიძებნება $y \in Y$ ელემენტი ისეთი, რომ $y \leq x$.

$Z \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება თავსებადი, თუ ყოველი სასრული $T \subset Z$ სიმრვლისათვის მოიძებნება $x \in X$ ელემენტი ისეთი, რომ $x \leq t$ ნებისმიერი $t \in T$ ელემენტისთვის.

კერძოდ, $x \in X$ და $y \in Y$ ელემენტებს ეწოდებათ თავსებადი, თუ $\{x, y\}$ ორელემენტიანი სიმრავლე თავსებადია X-ში.

$Y \subset X$ სიმრავლეს ეწოდება წყვილ-წყვილად არათავსებადი, თუ ნებისმიერი ორი განსხვავებული $x \in X$ და $y \in Y$ ელემენტი არათავსებადია.

ვიტყვით, რომ ნაწილობრივად დალაგებული $(X, \leq)$ სიმრავლე აკმაყოფილებს თვლად ჯაჭვთა პირობას, თუ ნებისმიერი წყვილ-წყვილად არათავსებადი ქვესიმრავლე X-დან არაუმეტეს თვლადია.

მარტინის აქსიომა: ვთქვათ, $(X, \leq)$ ნაწილობრივ დალაგებული სიმრავლეა, რომელიც აკმაყოფილებს თვლად ჯაჭვთა პირობას, ხოლო F არის X სიმრავლის კოინიციალურ ქვესიმრავლეთა ისეთი ოჯახი, რომ $card(F) < c$. მაშინ არსებობს X სიმრავლის ისეთი თავსებადი ქვესიმრავლე, რომელსაც F ოჯახის ყოველ სიმრავლესთან ექნება არაცარიელი თანაკვეთა.

მარტინის აქსიომა შეიძლება აგრეთვე ჩამოვაყალიბოთ წმინდა ტოპოლოგიურ ტერმინებშიც (იხ. [32]).

ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება თვლადი ჯაჭვების თვისების მქონე (ანუ სუსლინის თვისების მქონე), თუ მასში ნებისმიერი დიზიუნქტური ოჯახი, რომლის წევრები არაცარიელი ღია სიმრავლეებია, არაუმეტესდ თვლადია.

მარტინის აქსიომა. ნებისმიერი არაცარიელი კომპაქტური სივრცე, რომელიც აკმაყოფილებს თვლად ჯაჭვთა პირობას, არ წარმოიდგინება არსად მკვრივი ქვესიმრავლეების არაკონტინიალური ოჯახის გაერთიანების სახით, რომლის სიმძლავრე **c**-ზე მკაცრად ნაკლებია.

მათემატიკის საფუძვლების თვალსაზრისით, მარტინის აქსიომის ფორმულირება ნაწილობრივად დალაგებული სიმრავლეების ტერმინებში გაცილებით უფრო მნიშვნელოვანია, ვიდრე მისი ტოპოლოგიური ვარიანტი.

ახლა შემოვიღოთ განზოგადოებული ლუზინის და განზოგადოებული სერპინსკის სიმრავლეები, რომლებიც მნიშვნელოვან პარადადოქსალურ სიმრავლეებს წარმოადგენენ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე.

განსაზღვრება. $X \subset \mathbf{R}$ სიმრავლეს ეწოდება განზოგადოებული ლუზინის სიმრავლე, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1. X კონტინუუმის სიმძლავრისაა;
2. ყოველი პირველი კატეგორიის $Y \subset \mathbf{R}$ სიმრავლისათვის $X \cap Y$ სიმრავლის სიმძლავრე კონტინუუმზე მკაცრად ნაკლებია.

განსაზღვრება. $X \subset \mathbf{R}$ სიმრავლეს ეწოდება განზოგადოებული სერპინსკის სიმრავლე, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1. X კონტინუუმის სიმძლავრისაა;
2. ყოველი ლებეგის აზრით ნულზომის $Y \subset \mathbf{R}$ სიმრავლისათვის $X \cap Y$ სიმრავლის სიმძლავრე კონტინუუმზე მკაცრად ნაკლებია.

აღმოჩნდა, რომ ზემოთ განსაზღვრული სიმრავლეების არსებობისთვის მარტინის აქსიომა არის საკმარისი, თუმცა მათი არსებობა უფრო სუსტი დამატებითი სიმრავლურ-თეორიული დაშვებებიდანაც გამომდინარეობს.

დებულება 9. (ა) თუ მივიღებთ მარტინის აქსიომას, მაშინ არსებობს ლუზინის განზოგადოებული სიმრავლე.

(ბ) თუ მივიღებთ მარტინის აქსიომას, მაშინ არსებობს სერპინსკის განზოგადოებული სიმრავლე.

ამ თეორემის დამტკიცება ანალოგიურია ლუზინის სიმრავლისა და სერპინსკის სიმრავლის არსებობის დამტკიცების (იხ. §4).

დავუშვათ, რომ მარტინის აქსიომა მართებულია. მაშინ:

(1) არსებობს $X \subset \mathbf{R}$ სიმრავლე, რომელიც წარმოადგენს ვექტორულ სივრცეს $\mathbf{Q}$-ზე და არის ყველგან მკვრივი განზოგადოებული ლუზინის სიმრავლე $\mathbf{R}$ -ზე.

(2) არსებობს $X \subset \mathbf{R}$ სიმრავლე ისეთი, რომ X არის ვექტორული სივრცე $\mathbf{Q}$-ზე და ის წარმოადგენს ყველგან მკვრივ განზოგადოებულ სერპინსკის სიმრავლეს $\mathbf{R}$-ზე.

გარდა ამასა, მარტინის აქსიომის დაშვებით, არსებობს იზომორფიზმი f ადიტიური $\mathbf{R}$ ჯგუფიდან თავის თავზე და $X \subset \mathbf{R}$ განზოგადოებული ლუზინის სიმრავლე ისეთი, რომ $f(X)$ წარმოადგენს განზოგადოებულ სერპინსკის სიმრავლეს $\mathbf{R}$-ზე (იხ. [25], [26]).

მარტინის აქსიომის გამოყენებით მტკიცდება, რომ ყოველი განზოგადოებული ლუზინის სიმრავლე $\mathbf{R}$-ში არის აბსოლუტურად ანუ უნივერსალურად ნულზომადი.

ამასთანავე, განზოგადოებული ლუზინის სიმრავლის საშუალებით ადვილად მტკიცდება, რომ არსებობს $\mathbf{R}$-ის ქვესიმრავლეების σ-ალგებრა S ისეთი, რომ:

(1) ყოველი $x \in \mathbf{R}$ ელემენტისათვის გვაქვს $\{x\} \in S$;
(2) S არის თვლადად წარმოქმნილი σ-ალგებრა, ანუ არსებობს S-ის თვლადი ქვეოჯახი, რომელიც წარმოქმნის S-ს;
(3) არ არსებობს S-ზე განსაზღვრული არანულოვანი σ-სასრულო დიფუზიური ზომა.

კერძოდ, ლუზინის განზოგადოებული სიმრავლის არსებობიდან გამომდინარეობს, რომ c კარდინალური რიცხვი არ არის ზომადი ულამის აზრით.

§3-ში შემოტანილი იყო აბსოლუტურად არაზომადი ფუნქციის ცნება. გავიხსენოთ ეს ცნება.

ვთქვათ, E არის რაიმე სიმრავლე და f არის ფუნქცია E-დან R-ში. ვიტყვით, რომ f არის აბსოლუტურად არაზომადი ფუნქცია, თუ ყოველი არანულოვანი σ-სასრულო დიფუზიური μ ზომისათვის E-ზე, f არის არაზომადი μ-ს მიმართ.

მართებულია შემდეგი დებულება.

დებულება 10. თუ მივიღებთ მარტინის აქსიომას, მაშინ არსებობს ინიექციური ადიტიური ფუნქცია

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$

რომელიც ამასთანავე აბსოლუტურად არაზომადია.

დამტკიცება. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, მარტინის აქსიომიდან გამომდინარეობს ისეთი ლუზინის განზოგადოებული სიმრავლის არსებობა $\mathbf{R}$-ზე, რომელიც ამავდროულად არის ვექტორული სივრცე $\mathbf{Q}$-ზე. დავუშვათ X არის ასეთი ლუზინის განზოგადოებული სიმრავლე. რადგან

$$card(X) = c = card(\mathbf{R})$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ არსებობს ადიტიური ბიექცია

$$f: \mathbf{R} \to X$$

ცხადია, f იქნება ადიტიური ინექცია **R**-დან თავის თავში. ვაჩვენოთ რომ f ფუნქცია აბსოლუტურად არაზომადია. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ f არ არის აბსოლუტურად არაზომადი ფუნქცია, მაშინ არსებობს **R** -ზე არანულოვანი σ - სასრულო დიფუზიური ზომა μ ისეთი, რომ ყოველი ბორელის B სიმრავლისათვის **R**-ზე სამართლიანია დამოკიდებულება

$$f^{-1}(B) \in dom(\mu).$$

ანალოგიურად, X -ის ყოველი B' ბორელის ქვესიმრავლისათვის სამართლიანი იქნება დამოკიდებულება

$$f^{-1}(B') \in dom(\mu).$$

ზოგადობის შეუზღუდავად, ვიგულისხმოთ, რომ μ არის ალბათური ზომა. მაშასადამე X -ის ყოველი B' ბორელის ქვესიმრავლისათვის ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ

$$\nu(B') = \mu\big(f^{-1}(B')\big).$$

ამ გზით ჩვენ განვსაზღვრავთ ν ბორელის დიფუზიურ ალბათურ ზომას X-ზე, ეს კი შეუძლებელია, რადგან X აბსოლუტურად ნულზომადი სიმრავლეა. მაშასადამე მივიღეთ წინააღმდეგობა, რაც ამტკიცებს თეორემას.

ბუნებრივად დაისმის კითხვაგანზოგადოებული ლუზინის სიმრავლისა და განზოადოებული სერპინსკის სიმრავლეების კავშირების შესახებ სხვა კლასიკურ წერტილოვან სიმრავლეებთან (კერძდო, ვიტალის სიმრავლეებთან, ბერნშტეინის სიმრავლეებთან, ჰამელის ბაზისებთან). ამ მიმართულებით დავადგინეთ შემდეგი დებულების მართებულობა.

თეორემა 8. (ა) არ არსებობს განზოგადოებული ლუზინის სიმრავლე, რომელიც არის ვიტალის სიმრავლე;

(ბ) არ არსებობს განზოგადოებული ლუზინის სიმრავლე, რომელიც არის ბენშტეინის სიმრავლე;

(გ) მარტინის აქსიომის დაშვებით არსებობს ისეთი განზოგადოებული ლუზინის სიმრავლე, რომელიც ამავდროულად არის ჰამელის ბაზისი.

თეორემა 9. (ა) არ არსებობს განზოგადოებული სერპინსკის სიმრავლე, რომელიც არის ვიტალის სიმრავლე;

(ბ) არ არსებობს განზოგადოებული სერპინსკის სიმრავლე, რომელიც არის ბერნშტეინის სიმრავლე;

(გ) არსებობს ისეთი განზოგადოებული სერპინსკის სიმრავლე, რომელიც ამავდროულად არის ჰამელის ბაზისი.

მოყვანილი თეორემების დამტკიცება ანალოგიურია იმ მსჯელობის, როდესაც განვიხილავდით ლუზინისა და სერპინსკის სიმრავლეებს (იხ. §4).

§6. ინვარიანტული და კვაზიინვარიანტული ზომები, მათი თვისებები და მათი გაგრძელების ამოცანა

ამ პარაგრაფში წინასწარ მოვიყვანოთ ზომის თეორიის რამდენიმე ცნება და ფაქტი, რომლებიც შემდგომი მსჯელობების დროს დაგვჭირდება.

გავიხსენოთ, რომ (E,S,μ) სამეული არის ზომიანი სივრცე, თუ S წარმოადგენს E ბაზისური სიმრავლის რაიმე σ-ალგებრას, ხოლო μ კი არის S-ზე განსაზღვრული თვლადად ადიტიური არაუარყოფითი ფუნქცია, რომლისთვისაც სრულდება პირობა $\mu(\emptyset)=0$ (იხ. [29], [31], [39]).

ვთქვათ, მოცემულია (E,S,μ) ზომიანი სივრცე. μ ზომას ეწოდება σ-სასრულო, თუ არსებობს $\{X_i : i\in N\}$ სიმრავლეთა თვლადი ოჯახი E-დან ისეთი, რომ

$$(\forall i)(i\in N \Rightarrow X_i\in S),$$

$$\bigcup_{i\in N} X_i = E,$$

$$(\forall i)(i\in N \Rightarrow \mu(X_i)<+\infty).$$

μ ზომას ეწოდება არანულოვანი (არატრივიალური, არაგადაგვარებული), თუ

$$\mu(E)\neq 0.$$

μ ზომას ეწოდება ალბათური, თუ შესრულებულია პირობა $\mu(E)=1$.

μ ზომას ეწოდება სრული თუ შესრულებულია პირობა

$$(\forall X)(X\in S \& \mu(X)=0) \Rightarrow (\forall Y)(Y\subset X \Rightarrow Y\in S).$$

μ ზომის გასრულებას შემდგომში ყველგან აღვნიშნავთ μ' სიმბოლოთი, ხოლო S' სიმბოლოთი კი აღვნიშნავთ S მოცემული σ-ალგებრის გასრულებას μ ზომის მიმართ ანუ $dom(\mu')$-ს.

μ ზომას ეწოდება არაატომური, თუ შესრულებულია პირობა

$$(\forall X)\Big(X\in S \& \mu(X)>0 \Rightarrow (\exists Y)\big(Y\subset X \& Y\in S \& 0<\mu(Y)<\mu(X)\big)\Big).$$

როგორც ცნობილია (იხ. [29], [39]), μ ზომასთან კანონიკურად ასოცირდება μ^* გარე ზომა და μ_* შიგა ზომა, რომლებიც განსაზღვრულია $P(E)$ ბულეანზე და რომლებიც მოცემულია შემდეგი ფორმულებით:

$$\mu^* = \inf\{\sum_{n\in N}\mu(Y_n) : \{Y_n : n\in N\}\subset S \& X\subset \bigcup_{n\in N} Y_n\},$$

$$\mu_* = \sup\{\mu(Y) : Y\subset X \& Y\in S\}.$$

μ ზომას ეწოდება დიფუზიური (ანუ უწყვეტი), თუ შესრულებულია პირობა

$$(\forall x)(x \in E \Rightarrow \{x\} \in S \& \mu(x) = 0).$$

ვთქვათ, (E, S, μ) არის ზომიანი სივრცე და ν არის S-ზე განსაზღვრული სხვა რომელიღაც ზომა. ამბობენ, რომ ν არის აბსოლუტურად უწყვეტი μ ზომის მიმართ, თუ

$$(\forall X)\big(X \in S \Rightarrow (\ \mu(X) = 0 \Rightarrow \ \nu(X) = 0)\big).$$

ვთქვათ, E არის ძირითადი ბაზისური სიმრავლე, G კი ამ სიმრავლის გარდაქმნათა რომელიღაც ჯგუფი. E სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაიმე D კლასს ეწოდება G-ინვარიანტული, თუ შესრულებულია პირობა

$$(\forall g)(\forall X)(g \in G \& X \in D \Rightarrow g(X) \in D).$$

ვიტყვით, რომ (E, G, S, μ) ოთხეული არის ინვარიანტული ზომით აღჭურვილი სივრცე, თუ G წარმოადგენს E ბაზისური სივრცის გარდაქმნათა რაიმე ჯგუფს, S არის E სიმრავლის რომელიღაც G-ინვარიანტული σ-ალგებრა, ხოლო μ კი – S-ზე განსაზღვრული G-ივარიანტული ზომაა, ე.ი.

$$(\forall g)(\forall X)\Big(g \in G \& X \in S \Rightarrow \mu\big(g(X)\big) = \ \mu(X)\Big).$$

ვიტყვით, რომ (E, G, S, μ) ოთხეული არის კვაზიინვარიანტული ზომით აღჭურვილი სივრცე, თუ G წარმოადგენს E ბაზისური სივრცის გარდაქმნათა რაიმე ჯგუფს, S არის E სიმრავლის რომელიღაც G-ივარიანტული σ-ალგებრა, ხოლო μ კი – S-ზე განსაზღვრული G-კვაზიინვარიანტული ზომაა, ე.ი.

$$(\forall g)(\forall X)(g \in G \& X \in S \Rightarrow (\mu(X) = 0 \ \Leftrightarrow \ \mu(g(X)) = 0)).$$

ამ განსაზღვრებიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ ზომის კვაზი-ინვარიანტულობა არის უფრო სუსტი თვისება, ვიდრე მისი ინვრაიანტულობა. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ზომის კვაზიინვარიანტულობის ცნება უფრო ფართოა, ვიდრე ზომის ინვარიანტულობის ცნება.

ბაზისურ E სივრცის $Z \subset E$ ქვესიმრავლეს ეწოდება თითქმის G-ინვარიანტული (μ ზომის მიმართ), თუ შესრულებულია პირობა

$$(\forall g)(g \in G \Rightarrow \ \mu(g(Z)\Delta Z) = 0).$$

უსასრულო ბაზისური E სივრცის $Z \subset E$ ქვესიმრავლეს ეწოდება თითქმის G-ინვარიანტული (სიმრავლურ-თეორიული აზრით), თუ შესრულებულია პირობა

$$(\forall g)(g \in G \Rightarrow \ card(g(Z)\Delta Z) < card(E)).$$

ვთქვათ, E არის არაცარიელი სიმრავლე, G კი E-ს გარდაქმნათა ჯგუფი. M-ით აღვნიშნოთ σ-სასრულო G-ინვარიანტულ ზომათა კლასი E-ზე. ვიტყვით, რომ $\mu_1 \in M$ ზომა ფლობს ერთადერთობის თვისებას M-ში, თუ ყოველი $\mu_2 \in M$ ზომისთვის $dom(\mu_1) = dom(\mu_2)$ დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს ტოლობა $\mu_1 = \mu_2$.

ვთქვათ, E არის არაცარიელი სიმრავლე, G ამ სიმრავლის გარდაქმანათა რაიმე ჯგუფია, ხოლო μ_1 კი E-ს რომელიმე σ-ალგებრაზე განსაზღვრული σ-სასრულო G-ინვარიანტული ზომაა. ვიტყვით, რომ μ_1 ზომა ფლობს ერთადეთობის თვისებას, თუ $dom(\mu_1)$-ზე განსაზღვრული ყოველი σ-სასრულო G-ინვარიანტული μ_2 ზომისთვის არსებობს $q \in \mathbf{R}^+$ კოეფიციენტი (დამოკიდებული μ_2 ზომაზე) ისეთი, რომ $\mu_2 = q \cdot \mu_1$.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, μ_1 და μ_2 ზომები არიან პროპორციულები.

ბევრ შემთხვევაში პროპორციული ზომები არიან გაიგივებულები, ამიტომ მოყვანილი განსაზღვრება დაიყვანება პირველ განსაზღვრებამდე.

ლებეგის ზომის თეორიაში არსებით როლს თამაშობს ე.წ. შტეინჰაუზის თვისება.

ვიტყვით, რომ $X \subset \mathbf{R}$ სიმრავლე ფლობს შტეინჰაუზის თვისებას, თუ არსებობს ნამდვილი $\varepsilon > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ

$$(\forall h \in \mathbf{R})(|h| < \varepsilon \Rightarrow (X + h) \cap X \neq \emptyset).$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, $X \subset \mathbf{R}$ სიმრავლე ფლობს შტეინჰაუზის თვისებას, თუ

$$X - X = \{x' - x'' : x' \in X, x'' \in X\}$$

სიმრავლე წარმოადგენს 0 წერტილის მიდამოს.

გარკვეული გაგებით, შტეინჰაუზის თვისებას შეგვიძლია სიმრავლის მდგრადობის ინტრეპრეტაცია მივცეთ $\mathbf{R}$ ღერძის ყველა პარალელურ გადატანათა ჯგუფის მიმართ.

ვთქვათ, H არის არაცარიელი E სიმრავლის გარდაქმნათა ჯგუფი და $G \subset H$. აღვნიშნოთ M-ით E-ზე განსაზღვრულ σ-სასრულ H-ინვრიანტულ ალბათურ ზომათა კლასი. თუ $\mu \in M$ ზომა, როგორც G-ინვარიანტული ზომა ფლობს ერთადერთობის თვისებას M-ში, მაშის ის ასევე ფლობს ერთადერთობის თვისებას M-ში, როგორც H-ინვარიანტული ზომა.

ვთქვათ, K_μ და K_υ □ არიან საბაზისო E სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაიმე კლასები, რომლებზედაც შესაბამისად განსაზღვრულია სიმრავლის არაუარყოფითი, ადიტიური μ და ν ფუნქციები. μ ფუნქციას ეწოდება ν ფუნქციის გაგრძელება, თუ $K_\upsilon \subset K_\mu$ და ყოველი $A \in K_\upsilon$ სიმრავლისათვის ადგილი აქვს ტოლობას $\mu(A) = \nu(A)$.

საზოგადოდ, ზომის გაგრძელების ამოცანა შემდეგნაირად ფორმულირდება:
თუ მოცემულია ზომა სიმრავლეთა გარკვეულ კლასზე, შესაძლებელია თუ არა მისი გაგრძელება სიმრავლეთა რაც შეიძლება უფრო ფართო კლასზე, ამასთან სასურველია, რომ კარგი თვისებები შენარჩუნებულ იქნეს ასეთი გაგრძელების პროცესის დროს.
ამ ამოცანის გადასაჭრელად პირველად ლებეგმა და კარათეოდორმა გადადგეს ნაბიჯები, კერძოდ კარათეოდორმა აჩვენა შემდეგი თეორემის სამართლიანობა

თეორემა (კარათეოდორი). E საბაზისო სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაიმე Ξ გოლზე განსაზღვრული არაუარყოფითი, თვლადად ადიტიური ფუნქცია ერთადერთი გზით გაგრძელდება Ξ რგოლით წარმოქმნილ σ -რგოლზე განსაზღვრულ ზომამდე.
ხოლო ლებეგმა ჟორდანის ზომის გაგრძელება მოახდინა თავის ანუ ლებეგის ზომამდე. შემდგომ მრავალი მეცნიერი იხილავდა ანალოგიურ ამოცანებს. (იხ. [25], [29], [39]).

პირობითად შეგვიძლია გამოვყოთ ზომის გაგრძელების პრობლემის სამი ძირითადი ასპქეტი:

(ა) სიმრავლურ-თეორიული;
(ბ) ალგებრული;
(გ) ტოპოლოგიური.

სიმრავლურ-თეორიული კუთხით ამოცანა შემდეგნარიად ყალიბდება:

შეიძლება თუ არა არანულოვანი σ-სასრული დიფუზიური ზომა განისაზღვროს მოცემული არათვლადი სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლისათვის?

ამ კუთხით ამოცანის განხილვამ წარმოშვა დიდ კარდინალურ რიცხვთა თეორია (იხ. [6], [8], [14], [18]). ნაჩვენები იქნა, რომ მხოლოდ ძალიან დიდი სიმძლავრეების მქონე სიმრავლეთათვის, რომელთა არსებობა ვერ მტკიცდება თანამედროვე სიმრავლურ-თეორიული აპარატის საშუალებით, შესაძლებელია, რომ არანულოვანი σ-სასრული დიფუზიური ზომა გაგრძელდეს ყველა ქვესიმრავლეთა კლასზე. ამავე დროს დამტკიცდა, რომ თუ კონტინუუმის სიმძლავრისათვის შესაძლებელია ასეთი უნივერსალური ზომის აგება, მაშინ არსებობს ლებეგის აზრით არაზომადი წერტილოვანი სიმრავლე, რომლის სიმძლავრე კონტინუუმზე მკაცრად ნაკლებია (იხ. [18], [31]).

ამოცანის მეორე ასპექტი ეხება ისეთ ზომებს, რომლებსაც აქვთ გარკვეული ალგებრული თვისებები. მაგალითად, თუ მოცემული ზომა არის ინვარიანტული გარდაქმნათა რაიმე ჯგუფის მიმართ, მაშინ ბუნებრივია მოვითხოვოთ, რომ გაგრძელებული ზომაც იყოს ინვარიანტული იმავე ჯგუფის მიმართ, კერძოდ, ამოცანას აქვს შემდეგი სახე:

თუ არათვლად G ჯგუფზე მოცემულია არანულოვანი, σ-სასრული, G-ს ყველა მარცხენა ტრანსლაციათა ჯგუფის მიმართ ინვარიანტული ზომა, შეიძლება თუ არა ეს ზომა მკაცრად გაგრძელდეს ამავე ინვარიანტულობის თვისების შენარჩუნებით?

ეს საკითხი იყო ინტენსიური კვლევების საგანი (იხ. [29], [31], [39]).

ტოპოლოგიური თვალსაზრისით ზომის გაგრძელების ამოცანა ეხება იმ ზომებს, რომლებსაც აქვთ კარგი ტოპლოგიური თვისებები. მათემატიკურ ანალიზში ყველაზე ხშირად საქმე გვაქვს ტოპოლოგიურ სივრცეზე მოცემულ ე.წ. რეგულარულ ზომებთან, რომელთა თვისებები მჭიდრო კავშირიშია ამ ტოპოლოგიური სივრცის სტრუქტურასთან. აქ ზომის გაგრძელების ამოცანა შემდეგნაირად დაისმის:

ტოპოლოგიურ სივრცეზე მოცემულია რაიმე რეგულარობის თვისების მქონე ზომა; ეს ზომა უნდა გაგრძელდეს სიმრავლეთა უფრო ფართო σ -ალგებრაზე, თანაც აღნიშნული რეგულარობის თვისების შენარჩუნებით.

ამჟამად ცნობილია ზომის გაგრძელების მხოლოდ რამდენიმე ზოგადი მეთოდი. ერთ-ერთი საკმაოდ ნაყოფიერი და გავრცელებული მეთოდი გულისხმობს ნულზომის სიმრავლეებისგან წარმოქმნილ σ-იდეალის გაფართოებას მასში ახალი

წევრების დამატებით. ეს მეთოდი ცნობილ პოლონელ მათემატიკოსს ე. მარჩევსკის ეკუთვნის (იხ. [25], [51], [52]).

ვთქვათ, E ძირითადი ბაზისური სიმრავლეა. E სიმრავლის ქვესიმრავლეთა I კლასს ეწოდება იდეალი E-ზე, თუ ამ კლასისთვის შესრულებულია შემდეგი პირობები:

(1) $\emptyset \in I$;

(2) $E \notin I$;

(3) $(\forall X)(\forall Y)(X \in I \& Y \in I \Rightarrow X \cup Y \in I)$;

(4) $(\forall X)(\forall Y)(X \in I \& Y \subset X \Rightarrow Y \in I)$.

ვთქვათ, მოცემულია E საბაზისო სიმრავლე და ამ სიმრავლეზე განსაზღვრული რომელიღაც μ ზომა. გავიხსენოთ, რომ რაიმე $f: E \to \mathbf{R}$ ფუნქციას ეწოდება ზომადი μ ზომის მიმართ, თუ ნებისმიერი $B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ ბორელის სიმრავლისათვის სრულდება თანაფარდობა $f^{-1}(B) \in dom(\mu)$. ეს არის კლასიკური განსაზღვრა ფუნქციის ზომადობის მოცემული ზომის მიმართ.

ახლა M-ით აღვნიშნოთ E სიმრავლეზე განსაზღვრული ზომათა კლასი.

ვიტყვით, რომ $f: E \to \mathbf{R}$ ფუნქცია (ფარდობითად) ზომადია M კლასის მიმართ, თუ არსებობს ერთი მაინც $\mu \in M$ ზომა ისეთი, რომ f ფუნქცია ზომადი μ ზომის მიმართ. წინააღმდეგ შემთხვევაში, ვიტყვით, რომ f არის აბსოლუტურად არაზომადი M კლასის მიმართ.

შევნიშნოთ, რომ M კლასის მიმართ ფუნქციის ზომადობა ბუნებრივად იწვევს სიმრავლის ზომადობას ამავე M კლასის მიმართ. მართლაც, თუ $X \subset E$ ნებისმიერი სიმრავლეა, მაშინ ჩვეულებრივად განვსაზღვროთ მისი მახასიათებელი ფუნქცია E-ს მიმართ.

$$f_X(t) = \begin{cases} 1, & t \in X, \\ 0, & t \notin X\,. \end{cases}$$

აქედან გამომდინარე, ვიტყვით რომ X სიმრავლე ფარდობითად ზომადია M კლასის მიმართ, თუ f_X ფუნქცია ზომადია ამავე კლასის მიმართ.

$M(E)$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ყველა არანულოვანი σ-სასრულო დიფუზიური ზომების კლასი E სიმრავლეზე.

X ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება უნივერსალურად ნულზომადი, თუ მასზე არ შეიძლება განისაზღვროს არანულოვანი σ-სასრულო დიფუზიური ბორელის ზომა (იხ [25], [44]).

ლემა 1. ვთქვათ, X არის $\mathbf{R}$-ის რაიმე ქვესიმრავლე, აღჭურვილი ინდუცირებული ტოპოლოგიით. შემდეგი ორი წინადადება ექვივალენტურია:

(ა) X სიმრავლე არის უნივერსალურად ნულზომადი;

(ბ) $\mathbf{R}$-ზე განსაზღვრული ნებისმიერი σ-სასრულო (ალბათური) დიფუზიური ბორელის μ ზომისთვის გვაქვს ტოლობა $\mu^*(X) = 0$.

მტკიცდება, რომ $f: E \to \mathbf{R}$ ფუნქცია აბსოლუტურად არაზომადია $M(E)$ კლასის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

(1) ყოველი $t \in \mathbf{R}$ წერტილისათვის $f^{-1}(t)$ სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია;

(2) f ფუნქციის მნიშვნელობათა $ran(f) \subset \mathbf{R}$ სიმრავლე უნივერსალურად ნულზომადია.

დამტკიცება იხილეთ [31], [44] შრომებში.

ვთქვათ, E ძირითადი ბაზისური სიმრავლეა, G ამ სიმრავლის გარდაქმანათა რაიმე ჯგუფი, ხოლო M კი G-ივარიანტულ ზომათა კლასი E-ზე. ვიტყვით, რომ $Z \subset E$ სიმრავლე აბსოლუტურად არაზომადია M კლასის მიმართ, თუ ამ კლასში არ არსებობს ზომა, რომლის განსაზღვრის არეს ეკუთვნის Z სიმრავლე

მაგალითი 1. ვთქვათ, G არის $\mathbf{R}^n$ სივრცის ყველა იზომეტრიულ გარდაქმნათა D_n ჯგუფის ქვეჯგუფი, რომელიც შეიცავს R^n სივრცის ყველგან მკვრივ პარალელურ გადატანათა სიმრავლეს და μ არის ნებისმიერი G-ივარიანტულ ზომა R^n სივრცეში, რომელიც აგრძელებს ლებეგის ზომას. აღვნიშნოთ $M_G(\mu)$-თი μ ზომის ყველა შესაძლო G-ივარიანტულ გაგრძელებათა კლასი. მაშინ ყოველი μ-ზომადი $X \subset R^n$ სიმრავლისთვის, $\mu(X) > 0$, მოიძებნება $Z \subset X$ სიმრავლე, რომელიც აბსოლუტურად არაზომადია $M_G(\mu)$ კლასის მიმართ. ამ ფაქტის დამტკიცება იხილეთ [31], [44] წიგნებში.

კერძოდ, თუ μ-ს როლში განვიხილავთ ლებეგის კლასიკურ λ_n ზომას $\mathbf{R}^n$ სივრცეზე, მაშინ ყოველი λ_n-ზომადი და მკაცრად დადებითი ზომის მქონე $X \subset R^n\mathbf{R}^n$ სიმრავლე შეიცავს Z ქვესიმრავლეს, რომელიც იქნება აბსოლუტურად არაზომადი $M_G(\lambda_n)$ კლასის მიმართ.

ამ შედეგიდან უშუალოდ გამომდინარეობს, რომ $\mathbf{R}$-ზე მდებარე ნებისმრიერი ვიტალის სიმრავლე აბსოლუტურად არაზომადია $M_G(\lambda)$ კლასის მიმართ.

მაგალითი 2. ვთქვათ, μ არის σ-სასრულო ზომა რაიმე E სიმრავლეზე და $\{X_n: n < \omega\}$ არის დიზიუნქტიურ ქვესიმრავლეთა თვლადი ოჯახი E-დან, მაშინ E სიმრავლეზე არსებობს $\bar{\mu}$ ზომა რომელიც აგრძელებს μ ზომას და აკმაყოფილებს დამოკიდებულებას $\{X_n: n < \omega\} \subset dom(\bar{\mu})$.

დამტკიცება იხილეთ [31], [44] შრომებში.

თუ M_μ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ μ ზომის ყველა შესაძლო გაგრძელებათა კლასს, მაშინ ზემოთ თქმულიდან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერ

$f: E \to \mathbf{R}$ ფუნქცია, რომლის მნიშვნელობათა $ran(f)$ სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია, არის ზომადი M_μ კლასის მიმართ.

მოთხოვნა იმის შესახებ, რომ $\{X_n : n < \omega\}$ ოჯახი თვლადია და დიზიუნქტიური ოჯახი იყოს არსებითია. ამას გვიჩვენებს შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი 3. ვთქვათ $X \subset \mathbf{R}$ ლუზინის სიმრავლეა და განვიხილოთ იგი როგორც ტოპლოგიური სივრცე აღჭურვილი $\mathbf{R}$ -დან ინდუცირებული ტოპოლოგიით. აღვნიშნოთ $\{U_{pq} : p \in \mathbf{Q}, q \in \mathbf{Q}\}$-თი რაციონალურ ბოლოებიან ინტერვალთა ოჯახი $\mathbf{R}$-დან, მაშინ $\{U_{pq} \cap X : p \in \mathbf{Q}, q \in \mathbf{Q}\}$ სიმრავლეთა ოჯახი იქნება თვლადი ბაზა X სივრცეში. თუ ჩვენ განვსაზღვრავთ μ ალბათურ დიფუზიურ ზომას პირობით

$$\mu(Y) = \begin{cases} 0, & card(Y) \leq \omega, \\ 1, & card\,(X \setminus Y) \leq \omega, \end{cases}$$

მაშინ ვერ გავაგრძელებთ μ ზომას ისე, რომ $\{U_{pq} \cap X : p \in \mathbf{Q}, q \in \mathbf{Q}\}$ სიმრავლეები ერთდროულად მოხვდებიან μ ზომის გაგრძელების განსაზღვრის არეში, რადგან, როგრც უკვე ვიცით, X სიმრავლე არის უნივერსალურად ნულზომადი ნებისმიერი არანულოვანი σ-სასრულო დიფუზიური ბორელის ზომის მიმართ (იხ. §4).

აქედან აგერთვე გამომდინარეობს, რომ თუ μ არის არანულოვანი σ-სასრულო დიფუზიური ბორელის ზომა E ტოპოლოგიურ სივრცეზე და $\{X_n : n < \omega\}$ არის თვლადი ოჯახი E-ს ქვესიმრავლეებისა, მაშინ საზოგადოდ ჩვენ არ შეგვიძილა ვაჩვენოთ, რომ არსებობს μ ზომის გაგრძელება $\bar{\mu}$, ისეთი რომ $\{X_n : n < \omega\} \subset dom(\bar{\mu})$.

ეს მიანიშნებს $\{X_n : n < \omega\}$ სიმრავლეთა ოჯახის დიზიუნქტურობის პირობის აუცილებლობაზე ზომის სასურველი გაგრძელების არსებობისთვის.

მაგალითი 4. ვიტყვით, რომ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ არის ვიტალის ტიპის ფუნქცია S ეკვივალენტურობის დამოკიდებულებისთვის $\mathbf{R}$-ზე, თუ $(t, f(t)) \in S$ ყოველი $t \in \mathbf{R}$ წერტილისათვის და $ran(f)$ სიმრავლე არის სელექტორი $\mathbf{R}$ ღერძის დაშლისა S დამოკიდებულების მიმართ. ვთქვათ $M(\lambda)$ არის ლებეგის კლასიკური λ ზომის გაგარძელებათა კლასი $\mathbf{R}$ -ზე. მაშინ ვიტალის ტიპის ფუნქციები R_V დამოკიდებულებისათვის ზომადია $M(\lambda)$ კლასის მიმართ. დამტკიცება იხ. [31], [44].

ვთქვათ E არის საბაზისო სივრცე, G არის E საბაზისო სივრცის გადანაცვლებათა ჯგუფი, S არის E საბაზისო სივრცის ქვესიმრავლეთა რაიმე G-ინვარიანტული σ-ალგებრა, ხოლო μ არის E-ზე განსაზღვრული რაიმე ზომა. ვიტყვით, რომ (E, G, S, μ) ოთხეულს გააჩნია ამოწურვის თვისება (ერგოდულობა, მეტრიკული ტრანზიტულობა), თუ ნებისმიერი μ-ზომადი $X \subset E$ სიმრავლისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\mu(X) > 0$, არსებობს თვლადი ოჯახი $\{g_n : n < \omega\} \subset G$ ისეთი, რომ

$$\mu(E \setminus \bigcup_{n \in N} g_n(X)) = 0.$$

დავუშვათ μ რაიმე G-ზომაა $\mathbf{R}^n$ სივრცეზე. განვიხილოთ შემდეგი ორი დამოკიდებულება:

(*) ნებისმიერი ელემენტი μ ზომის განსაზღვრის არიდან წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$(Z \cup Z_1)\setminus Z_2,$$

სადაც Z არის ლებეგის აზრით ზომადი ქვესიმრავლე $\mathbf{R}^n$ ევკლიდური სივრცის, ხოლო Z_1 და Z_2 წარმოადგენენ $\mathbf{R}^n$ სივრცის ისეთ ქვესიმრავლეებს, რომელთათვისაც შესრულებულია პირობა $\mu(Z_1) = \mu(Z_2) = 0$;

(**) ყოველი μ-ზომადი სიმრვალე მკაცრად დადებითი μ-ზომით ამოწურავს $\mathbf{R}^n$ სივრცეს.

(*) დამოკიდებულებას ეწოდება მარჩევსკის აქსიომა, ხოლო (**) დამოკიდებულება კი ფაქტობრივად ნიშნავს, რომ μ-ს აქვს ამოწურვის თვისება.

მაგალითი 5. დავუშვათ μ არის $\mathbf{R}^n$ სივრცის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრაზე მოცემული რაიმე ზომაა და წარმოადგენს კლასიკური ბორელის ზომის გაგრძელებას $\mathbf{R}^n$ სივრცეში. ვიტყვით, რომ $x \in \mathbf{R}^n$ წერტილი არის სიმკვრივის წერტილი მოცემულ μ-ზომად X სიმრავლისათვის, თუ ზღვარი

$$\frac{\mu(K_x \cap X)}{\mu(K_x)}$$

შეფარდების, სადაც K_x არის x წერტილის შემცველი რაიმე n-განზომილებიანი კუბი x ცენტრით, არსებობს და უდრის ერთს, როცა K_x კუბის დიამეტრი მიისწრაფის ნულისკენ.

იმისათვის, რომ $\mathbf{R}^n$ სივრცეში განსაზღვრული μ ზომა, რომელიც ბორელის კლასიკურ ზომას აგრძელებს, აკმაყოფილებდეს (*) პირობას, აუცილებელი და საკმარისია, რომ ნებისმიერი μ-ზომადი ქვესიმრავლის თითქმის ყველა წერტილი იყოს სიმკვრივის წერტილი ამ სიმრავლისთვის. უფრო მეტიც, იმისათვის რომ სამართლიანი იყოს (*) დამოკიდებულება, საკმარისია, რომ ნებისმიერი μ-ზომადი სიმრავლე მკაცრად დადებითი ზომით შეიცავდეს ერთ სიმკვრივის წერტილს მაინც. შესაბამისად მარჩევსკის აქსიომის ჩამოყალიბება შესაძლებელია სიმკვრივის წერტილების ტერმინებში.

ახლა მოკლედ აღვწეროთ ინვარიანტული (კვაზიინვარიანტული) ზომების გაგრძელების მარჩევსკის მეთოდი, რომლის კონკრეტულ გამოყენებებს შემდეგ პარაგრაფში განვიხილავთ.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ოთხეული (E, G, S, μ), ხოლო K არის ისეთი თვლადად ადიტიური G-ინვარიანტული იდეალი E სივრცის ბულეანში, რომ სამართლიანია

$$(\forall Y \in K)(\mu_*(Y) = 0)$$

ტოლობა. მაშინ არსებობს μ ზომის გაგრძელება $\bar{\mu}$ ისეთი, რომ

$$\bar{\mu}\left((Z \cup Z')\setminus Z''\right) = \mu(Z),$$

სადაც Z ნებისმიერი μ-ზომადი სიმრავლეა საბაზისო E სივრცეში, ხოლო Z' და Z'' არიან K იდეალის ნებისმიერი ელემენტები.

პირველ რიგში ვაჩვენოთ $\bar{\mu}$ ფუნქციონალის მოყვანილი განსაზღვრის კორექტულობა.

დავუშვათ

$$(Z_1 \cup X')\backslash X'' = (Z_2 \cup X''')\backslash X'''',$$

სადაც Z_1 და Z_2 არიან μ-ზომადი სიმრავლეებია E-ში, ხოლო X', X'', X''', X'''' არიან K იდეალის ნებისმიერი ელემენტები. უნდა ვაჩვენოთ, რომ $\mu(Z_1) = \mu(Z_2)$. ამის საჩვენებლად საკმარისია დავადგინოთ $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$ ტოლობის სამართლიანობა.

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ $\mu(Z_1 \Delta Z_2) > 0$.

მაშინ გვექნება შემდეგი დამოკიდებულებები:

(ა) $Z_1 \Delta Z_2 \subset X' \cup X'' \cup X''' \cup X''''$,

(ბ) $\mu_*(X' \cup X'' \cup X''' \cup X'''') > 0$.

მაგრამ (ბ) თავის მხრივ ეწინააღმდეგება K იდეალის განსაზღვრას ანუ $X' \cup X'' \cup X''' \cup X'''' \in K$ დამოკიდებულებას, მაშასადამე კორექტულობა ვაჩვენეთ.

აღვნიშნოთ S'-ით ის σ-ალგებრა, რომელიც შედგება ყველა ისეთი შესაძლო სიმრავლისგან, რომელთა წარმოდგენა შესაძლებელია $(Z \cup X')\backslash X''$ სახით, სადაც Z არის μ-ზომადი ქვესიმრავლე E-ში, ხოლო X' და X'' არიან K იდეალის ნებისმიერი ელემენტები. ვაჩვენოთ, რომ ასე განსაზღვრული S' სიმრავლეთა კლასი ნამდვილად წარმოადგენს σ-ალგებრას.

დავუშვათ, რომ $((Z_k \cup X'_k)\backslash X''_k)_{k\in N}$ არის S' კლასის ელემენტთა მიმდევრობა. მაშინ ამ მიმდევრობისთვის გვექნება დამოკიდებულება:

$$\left((\cup_{k\in N} Z_k)\backslash \cup_{k\in N}(X'_k \cup X''_k)\right) \subset \cup_{k\in N}[(Z_k \cup X'_k)\backslash X''_k] \subset \left(\cup_{k\in N} Z_k\right) \cup \left(\cup_{k\in N}(X'_k \cup X''_k\right).$$

ამიტომ სამართლიანია წარმოდგენა

$$\bigcup_{k\in N}[(Z_k \cup X'_k)\backslash X''_k] = ((\bigcup_{k\in N} Z_k) \cup Y')\backslash Y'',$$

სადაც Y' და Y'' არიან K იდეალის ელემენტები.

ადვილად მოწმდება, რომ თუ რაიმე სიმრავლე ეკუთვნის S'-ს, მაშინ მისი დამატებაც ეკუთვნის S'-ს. შევნიშნოთ ასევე, რომ თუ გვაქვს

$$(Z_1 \cup X'_1)\backslash X''_1 \in S, \ \ (Z_2 \cup X'_2)\backslash X''_2 \in S$$

და თუ ამასთან ერთად სრულდება ტოლობა

$$\left((Z_1 \cup X'_1)\backslash X''_1\right) \cap \left((Z_2 \cup X'_2)\backslash X''_2\right) = \emptyset,$$

მაშინ გვექნება $\mu(Z_1 \cap Z_2) = 0$.

მართლაც ეს ბოლო ტოლობა უშუალოდ გამომდინარეობს ჩართვიდან

$$Z_1 \cap Z_2 \subset X'_1 \cup X''_1 \cup X'_2 \cup X''_2$$

იმის გათვალისწინებით, რომ $\mu_*\left(X'_1 \cup X''_1 \cup X'_2 \cup X''_2\right) = 0$.

იმავე მოსაზრებებიდან მარტივად მტკიცდება $\bar{\mu}$ ზომის თვლადად ადიტიურობა. მართლაც, დავუშვათ $((Z_k \cup X'_k)\backslash X''_k)_{k\in N}$ არის დიზიუნქციური მიმდევრობა S'-ის ელემენტების. მაშინ

$$\bigcup_{k\in N}[(Z_k \cup X'_k)\backslash X''_k] = \left[\left(\bigcup_{k\in N} Z_k\right) \cup Y'\right]\backslash Y'',$$

სადაც Y', Y'' არიან K იდეალის რომელიღაც ელემენტები. აქედან მივიღებთ

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{k\in N}[(Z_k \cup X'_k)\backslash X''_k]\right) = \bar{\mu}\left(\left[\left(\bigcup_{k\in N} Z_k\right) \cup Y'\right]\backslash Y''\right) = \mu\left(\bigcup_{k\in N} Z_k\right)$$
$$= \sum_{k\in N} \mu(Z_k) = \sum_{k\in N} \bar{\mu}\ \left((Z_k \cup X'_k)\backslash X''_k\right).$$

ზემოთ მოყვანილი მარჩევსკის მეთოდის კონკრეტული გამოყენებები მოყვანილია შემდეგ შრომებში [31], [44], [52] და აგრეთვე მომდევნო პარაგრაფში.

სასრულგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცისგან განსხვავებით უსასრულოგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებში, როგორც წესი, არ არსებობს არანულოვანი სიგმა-სასრული ბორელის ზომა, რომელიც ინვარანტულია სივრცის ყველა პარალელურ გადატანათა ჯგუფის მიმართ. მაგრამ სამაგიეროდ არსებობს ისეთი არანულოვანი სიგმა-სასრული ბორელის ზომები, რომლებიც ინვარიანტულია ყველგან მკვრივი ვექტროული ქვესივრცეების მიმართ. შემდეგი მაგალითი იძლევა ამ ფაქტის თვალსაჩინო ილუსტრაციას (იხ. [53]

მაგალითი 6. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$A_n = R_0 \times R_1 \times \cdots \times R_n \times \prod_{i>n} \Delta_i \quad (n \in N),$$

სადაც

$$(\forall i)(i \in N \Rightarrow R_i = \mathbf{R},$$

$$(\forall i)\left(i \in N \Rightarrow \Delta_i = \left[0, \frac{1}{i+1}\right)\right).$$

ყოველი R_i $(i \in N)$ სივრცე აღვჭურვოთ ინვარიანტული ლებეგის ზომის,

ნორმირებული $\mu_i(\Delta_i)=1$ პირობით, ხოლო ყოველი Δ_i $(i \in N)$ სივრცე აღვჭურვოთ ლებეგის λ_i ზომით, ნორმირებული $\lambda_i(\Delta_i)=1$ პირობით.

ყოველი ნატურალური $i \in N$-სთვის შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\chi_n = \prod_{i \le n} \mu_i \times \prod_{i > n} \lambda_i$$

და $\bar{\chi}_n$-ით აღვნიშნოთ ბორელის ზომა $\mathbf{R}^N$ სივრცეში, განსაზღვრული ტოლობით

$$(\forall X)\big(X \in B(\mathbf{R}^N) \Rightarrow \bar{\chi}_n(X) = \chi_n(X \cap A_n)\big).$$

$\{\bar{\chi}_n : n < \omega\}$ ზომათა ოჯახისათვის არსებობს ინდუქციური ზღვარი,

$$\lim_{n\to\infty} \bar{\chi}_n(X) = \chi(X),$$

თანაც χ ფუნქციონალი წარმოადგენს არანულოვან σ-სასრულო ზომას, რომელიც განსაზღვრულია $\mathbf{R}^N$ სივრცის ბორელის σ-ალგებრაზე.

მართლაც, რადგან ყოველი ნატურალური n რიცხვისათვის $A_n \subset A_{n+1}$, ამიტომ χ_{n+1} ზომის ადიტიურობის გამო გვექნება

$$\bar{\chi}_{n+1}(x) = \chi_{n+1}(X \cap A_{n+1}) = \chi_{n+1}\big(X \cap [A_{n+1} \setminus A_n \cup A_n]\big) =$$
$$= \chi_{n+1}\big[X \cap (A_{n+1} \setminus A_n)\big] + X_{n+1}(X \cap A_n).$$

შევნიშნოთ, რომ χ_{n+1} ზომის შევიწროება A_n სიმრავლეზე ემთხვევა χ_n ზომას. $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in N)$ ჩართვის გამო გვაქვს

$$(\forall X)\big(X \in B(\mathbf{R}^N) \Rightarrow \chi_n(X \cap A_n) \le \chi_{n+1}(X \cap A_{n+1})\big).$$

აქედან კი გამომდინარეობს ზღვრის არსებობა

$$\lim_{n\to\infty} \bar{\chi}_n(X) = \chi(X).$$

ვაჩვენოთ, რომ ამ ზღვარს გააჩნია ზომის ყველა თვისება.

1) χ თვლადად ადიტიურია.

ვთქვათ, $X = \bigcup_{k \in N} X_k$, სადაც

$$(\forall k)(\forall n)(k \in N \;\&\; n \in N \;\&\; k \ne n \Rightarrow X_k \cap X_n = \phi).$$

$$(\forall k)(k \in N \Rightarrow X_k \in dom(\chi)).$$

ერთის მხრივ, გვაქვს

$$\chi(X)=\lim_{n\to\infty}\overline{\chi}_n(X)=\lim_{n\to\infty}\overline{\chi}_n\left(\bigcup_{k\in N}X_k\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in N}\overline{\chi}_n(X_k)\leq\sum_{k\in N}\lim_{n\to\infty}\overline{\chi}_n(X_k)=\sum_{k\in N}\chi(X_k)$$

ხოლო, მეორე მხრივ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\chi(X)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in N}\overline{\chi}_n(X_k)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}\overline{\chi}_n(X_k)\right)+$$

$$+\lim_{n\to\infty}\sum_{k>n}\overline{\chi}_n(X_k)=\sum_{k=1}^{m}\lim_{n\to\infty}\overline{\chi}_n(X_k)+\lim_{n\to\infty}\sum_{k>N}\overline{\chi}_n(X_k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\overline{\chi}_n(X_k)+\lim_{k\to\infty}\sum_{k\in N}\overline{\chi}_n(X_k),$$

ე.ი.

$$\chi\left(\bigcup_{k\in N}X_k\right)\geq\sum_{k=1}^{m}\chi(X_k),$$

და, შესაბამისად,

$$\chi\left(\bigcup_{k\in N}X_k\right)\geq\sum_{k\in N}\chi(X_k).$$

საბოლოოდ კი მივიღებთ, რომ

$$\chi\left(\bigcup_{k\in N}X_k\right)=\sum_{k\in N}\chi(X_k).$$

ამით χ ზომის თვლადად ადიტიურობა დამტკიცებულია.

2) χ ზომა არანულოვანია, რადგან

$$\chi\left(\prod_{i\in N}\Delta_i\right)=1.$$

3) χ ზომა σ-სასრულოა.

მართლაც, შევნიშნოთ, რომ

$$R^N=\left(R^N\setminus\bigcup_{n\in N}A_n\right)\cup\left(\bigcup_{n\in N}A_n\right).$$

რადგან

$$R^N \setminus \bigcup_{n\in N} A_n \in \mathrm{B}(R^N),$$

ამიტომ χ ზომის განსაზღვრის თანახმად, გვექნება

$$\overline{\chi}_n\left(R^N \setminus \bigcup_{n\in N} A_n\right) = \chi_n\left\{\left[R^N \setminus \bigcup_{n\in N} A_n\right]\cap A_n\right\} = \chi_n(\phi) = 0.$$

რადგან ყოველი $n \in N$ ინდექსისთვის $\overline{\chi}_n$ არის σ-სასრული, ამიტომ არსებობს $\left\{B_k^{(n)} : k \in M\right\}$ ზომად სიმრავლეთა ოჯახი ისეთი, რომ

$$(\forall k)(k \in N \Rightarrow \overline{\chi}_n(B_k^{(n)}) < +\infty);$$

$$(\forall k)(k \in N \Rightarrow A_n = \bigcup_{k\in N} B_k^{(n)}).$$

განვიხილოთ სიმრავლეთა ოჯახი

$$\left\{B_k^{(n)} : k \in N, n \in N\right\}.$$

ცხადია, რომ

$$(\forall k)(\forall n)(k \in N \,\&\, n \in N \Rightarrow \chi\left(B_k^{(n)}\right) = \chi\left(B_k^{(n)} \cap A_n\right) = \overline{\chi}\left(B_k^{(n)}\right) < +\infty).$$

მეორე მხრივ, გვაქვს

$$\bigcup_{n\in N} A_k = \bigcup_{n\in N}\left(\bigcup_{k\in N} B_k^{(n)}\right).$$

საბოლოოდ მივიღებთ

$$R^N = \left(R^N \setminus \bigcup_{n\in N} A_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in N}\left(\bigcup_{k\in N} B_k^{(n)}\right)\right),$$

საიდანაც ვღებულობთ, რომ χ ზომა σ-სასრულოა.

§7. პარადოქსალური წერტილოვანი სიმრავლეების ზომადობის საკითხი

სიმრავლეთა პარადოქსალური ხასიათი დაკავშირებულია ორ ასპექტთან, კერძოდ:

(ა) ზომის თეორიის ასპექტი;

(ბ) ტოპოლოგიური ასპექტი.

როგორც ცნობილია, ზომის თეორიის თვალსაზრისით პარადოქსალურია სიმრავლეები, რომლებიც არ არიან ზომადები კლასიკური ზომების ან ზომათა კლასების მიმართ. ხოლო ტოპოლოგიური კუთხით სიმრავლეთა პარადოქსალურობა ნიშნავს, რომ ეს სიმრავლეები არ ფლობენ ბერის თვისებას.

წინა პარაგრაფებში ჩვენს მიერ განხილული იქნა პარადოქსალური წერტილოვანი სიმრავლეები:

1. ვიტალის სიმრავლე, რომელიც არ არის ზომადი ლებეგის ზომის მიმართ. უფრო მეტიც, ეს სიმრავლე არის აბსოლუტურად არაზომადი ლებეგის ზომის ყველა ინვარიანტულ გაგრძელებათა კლასის მიმართ;
2. ბერნშტეინის სიმრავლე, რომელიც არ არის ზომადი ლებეგის ზომის მიმართ. ამასთან, ბერნშტეინის სიმრავლე არის აბსოლუტურად არაზომადი სიმრავლე ყველა არანულოვანი $\sigma-$ სასრული დიფუზიური ბორელის ზომების გასრულებათა კლასის მიმართ **R**-ზე;
3. ჰამელის ბაზისი, რომელიც შეიძლება იყოს არაზომადი ლებეგის აზრით. ამის გარდა ჰამელის ბაზისი საინტერესოა თავის მხრივ, რადგან გვაძლევს კოშის ფუნქციაონალური განტოლების არატრიავალურ ამონახსნს, მაშასადამე ლებეგის აზრით არაზომად სიმრავლეს;
4. ლუზინის სიმრავლე, რომელიც ზომის თვალსაზრისით ძალიან "პატარა" ობიექტს წარმოადგენს, რადგან არის აბსოლუტურად ნულზომის სიმრავლე. მაგრამ იგი კატეგორიის თვალსაზრისით ძალიან "ცუდი" სიმრავლეა, რადგან არ ფლობს ბერის თვისებას. უფრო მეტიც, ლუზინის სიმრავლის ყოველი არათვლადი ქვესიმრავლე ასევე არ ფლობს ბერის თვისებას;
5. სერპინსკის სიმრავლე, რომელიც არაზომადია ლებეგის აზრით. ასევე, მისი ყოველი არათვლადი ქვესიმრავლეც არაზომადია ლებეგის აზრით.

სადისერტაციო ნაშრომში შესწავლილი იქნა ზემოთ მოყვანილ პარადოქსალურ სიმრავლეებს შორის კავშირები და ურთიერთდამოკიდებულებები. როგორც უკვე აღვნიშნეთ, ვიტალის სიმრავლე, ბერნშტეინის სიმრავლე და სერპინსკის სიმრავლე ზომის თეორიის თვალსაზრისით „ცუდ" (პარადოქსარული) სიმრავლეებს წარმოადგენენ. ამ პარაგრაფში ჩვენ აღნიშნულ სიმრავლეებს განვიხილავთ ზომის თეორიის კუთხით და მათთვის შევისწავლით ზომადობის საკითხებს. კერძოდ კი, ნაჩვენები იქნება ლებეგის ზომის ისეთი ინვარიანტული გაგრძელებების არსებობა, რომლის მიმართაც ესა თუ ის „ცუდი" სიმრავლე გახდება ზომადი.

მათემატიკის განვითარების ხანგრძლივი ისტორია გვიჩვენებს, რომ ხშირად ხდება მრავალი პარადოქსალური ობიექტის აღმოჩენა. კერძოდ, ისეთი პარადოქსალური წერტილოვანი სიმრავლეების, რომლებიც პარადოქსალურ სიმრავლეებს წარმოადგენენ ზომის თეორიისათვის. სწორედ ასეთ ობიექტებზე ზომის გაგრძელება მნიშვნელოვან საკითხს წარმოადგენს მათემატიკური ანალიზის, ფუნქციათა თეორიისა და ზომის თეორიისათვის. როგორც უკვე იყო ნათქვამი, ამ ამოცანას სამი ძირითადი ასპექტი გააჩნია:

(1) სიმრავლურ-თეორიული ასპექტი;

(2) ალგებრული ასპექტი;

(3) ტოპოლოგიური ასპექტი.

მოყვანილი ასპექტები განხილულია [25], [29], [44] შრომებში.

დავუშვათ E არის რაიმე საბაზისო სიმრავლე, S არის E-ს ქვესიმრავლეებით წარმოქმნილი σ-ალგებრა, ხოლო μ კი არანულოვანი დიფუზიური ზომაა S-ზე. ზომის გაგრძელების ძირითად ამოცანას წარმოადგენს μ-ს ისეთი გაგრძელების პოვნა, როლიც განსაზღვრულია E-ს ქვესიმრავლეთა რაც შეიძლება ფართო კლასზე (სიმძლავრის თვალსაზრისით).

ზომის გაგრძელების ამოცანის ისტორია, რომელიც XIX საუკუნის ბოლოს წამოიჭრა ნამდვილი ცვლადის ფუნქციათა თეორიაში, შეიძლება განვიხილით შემდეგი თანმიმდევრობით:

(1) როგორც ცნობილია, ეს საკითხი ნაწილობრივად ა. ლებეგმა ამოხსნა XX საუკუნის დასაწყისში. მან ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ ღერძზე ააგო ზომა λ, რომელიც წარმოადგენს ჟორდანის კლასიკური ზომის გაგრძელებას. შემდგომში ლებეგმა თავის მიერ აგებული ზომა განაზოგადა $\mathbf{R}^n$ ევკლიდური სივრცისთვის და ამით მიღებული იქნა ლებეგის კლასიკური n-განზომილებიანი λ_n ზომა (იხ. [31], [39], [44], [54]);

(2) XX საუკუნეში კარათეოდორმა საკმაოდ ზოგადი სქემის მეშვეობით ნებისმიერი σ-სასრულო ზომა სიმრავლეთა ალგებრიდან გააგრძელა მის მიერ წარმოქმნილ σ-ალგებრაზე (იხ. [29], [39]);

(3) ულამის ფუნდამენტური თეორემის თანახმად, მხოლოდ ძალიან დიდი სიმძლავრეების მქონე სიმრავლეებისთვის, რომელთა არსებობა ვერ მტკიცდება თანამედროვე სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატიკის ჩარჩოებში, შესაძლებელია ან არაწინააღმდეგობრივია, რომ არანულოვანი σ-სასრულო დიფუზიური ზომა განსაზღვრული იყოს ყველა ქვესიმრავლეთა კლასზე (იხ. [29], [39], [55], [56]).

მოვიყვანოთ რამდენიმე განსაზღვრება.

ვთქვათ E არის რაიმე სიმრავლე, ხოლო M არის ამ სიმრავლეზე განსაზღვრულ ზომათა რაიმე კლასი. ყოველი $X \subset E$ სიმრავლის ზომადობისათვის M ზომათა კლასის მიმართ შეიძლება გამოვყოთ შემდეგი სამი კატეგორია:

(ა) $X \subset E$ არის აბსოლუტურად (უნივერსალურად) ზომადი M-ის მიმართ (ე.ი. ყოველი $\mu \in M$ ზომისთვის X ზომადია μ-ს მიმართ);

(ბ) $X \subset E$ არის ფარდობითად ზომადი M-ის მიმართ (ე.ი. არსებობს ერთი მაინც $\mu \in M$ ზომა ისეთი, რომ X ზომადია μ-ს მიმართ);

(გ) $X \subset E$ არის აბსოლუტურად არაზომადი M-ის მიმართ (ე.ი. ყოველი $\mu \in M$ ზომისთვის X არაზომადია μ-ს მიმართ).

დავუშვათ, X არის რაიმე ანალიზური ანუ სუსლინის სიმრავლე $\mathbf{R}$ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე. დესკრიფციული სიმრავლეთა თეორიის ცნობილი თეორემის თანახმად ეს სიმრავლე წარმოადგენს აბსოლუტურად ზომად სიმრავლეს ყველა σ-სასრულ დიფუზიურ ბორელის ზომათა გასრულებების მიმართ (იხ. [29], [31], [39], [44]).

ანალოგიურად, თუ Y წარმოადგენს ლუზინის სიმრავლეს ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე, მაშინ იგი არის აბსოლუტურად ნულზომადი სიმრავლე იმავე კლასის მიმართ. მარტინის აქსიომის დაშვებით ჩვენ გვაქვს ლუზინის განზოგადოებული

სიმრავლე, რომელიც ასევე აბსოლუტურად ნულზომად სიმრავლეს წარმოადგენს ყველა σ-სასრულ დიფუზიურ ბორელის ზომების გასრულებების მიმართ.

როგორც ცნობილია, ვიტალის კლასიკური თეორემის თანახმად არსებობს $\mathbf{R}$ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლე. როგორც წინა პარაგრაფებში აღვნიშნეთ, ვიტალის მიერ 1905 წელს აგებული სიმრავლე, წარმოადგენს ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლის ისტორიულად პირველ მაგალითს. როგორც ცნობილია, ვიტალის სიმრავლე არის $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ ფაქტორ ჯგუფის ნებისმიერი სელექტორი. ვთქვათ, X არის ვიტალის სიმრავლე $\mathbf{R}$ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე, მაშინ სამართლიანია შემდეგი ორი დამოკიდებულება:

(1) $\cup\{X+q : q \in \mathbf{Q}\} = \mathbf{R}$;

(2) თუ $q \in \mathbf{Q}, r \in \mathbf{Q}$ და $q \neq r$, მაშინ $(X+q) \cap (X+r) = \emptyset$.

ამ დამოკიდებულებებიდან არ არის ძნელი იმის ჩვენება, რომ X არის აბსოლუტურად არაზომადი სიმრავლე ყველა ისეთი ზომის მიმართ $\mathbf{R}$-ზე, რომლებიც წარმოადგენენ ლებეგის ზომის გაგრძელებას და არიან ინვარიანტულები $\mathbf{R}$-ის ყველა პარალელურ გადატანათა ჯგუფის მიმართ. ეს კი ნიშნავს, რომ X არის აბსოლუტურად არაზომადი სიმრავლე ლებეგის ზომის ინვარიანტულ გაგრძელებათა კლასის მიმართ. მეორეს მხრივ მტკიცდება, რომ ზოგიერთი ვიტალის სიმრავლე არის ზომადი ლებეგის ზომის გარკვეულ კვაზიინვარიანტული გაგრძელებების მიმართ. ეს ნიშნავს, რომ არსებობს ვიტალის სიმრავლე $\mathbf{R}$-ზე, რომელიც არის ფარდობითად ზომადი ლებეგის ზომის ყველა კვაზიინვარიანტული გაგრძელებების კლასის მიმართ (იხ. [25], [44]).

ზომის გაგრძელების ამოცანას მრავალი მნიშვნელოვანი გამოყენებები აქვს მათემატიკის სხვადასხვა დარგში, როგორებიცაა: სიმრავლეთა თეორია, ზოგადი ტოპოლოგია, ფუნქციონალური ანალიზი, ალბათობის თეორია და სტოქასტურ პროცესთა თეორია. ზომის გაგრძელების ერთ-ერთი ცნობილი ზოგადი მეთოდი არის მარჩევსკის მეთოდი, რომელიც დაწვრილებით წინა პარაგრაფში განვიხილეთ. აქ, უბრალოდ, გავიმეოროთ ამ მეთოდის მოკლე აღწერა.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ოთხეული (E, G, S, μ), ხოლო K არის E სივრცის ქვესიმრავლეთა ისეთი თვლადად ადიტიური G-ინვარიანტული იდეალი, რომ სამართლიანია

$$(\forall Y \in K)(\mu_*(Y) = 0)$$

ტოლობა, სადაც μ_*-ით აღნიშნულია μ ზომასთან ასოცირებული შიგა ზომა, მაშინ არსებობს μ ზომის ისეთი გაგრძელება $\bar{\mu}$, რომ

$$\bar{\mu}\left((Z \cup Z') \setminus Z''\right) = \mu(Z),$$

სადაც $Z \subset E$ სივრცის ნებისმიერი μ-ზომადი სიმრავლეა, ხოლო Z' და Z'' არიან K იდეალის ელემენტები. ამასთან, თუ საწყისი μ ზომა არის G-ინვარიანტული (G-კვაზიინვარიანტული), მაშინ $\bar{\mu}$ ზომაც იქნება G-ინვარიანტული (G-კვაზიინვარიანტული).

დავუშვათ, საბაზისო E სიმრავლეზე მოცემული გვაქვს $\sigma-$ სასრული G-ინვარიანტული ზომა μ და ისეთი $Y \subset E$ სიმრავლე, რომ

$$\mu_*(Y) = 0;$$

$$(\forall g \in G)(\mu^*(g(Y)\Delta Y) = 0),$$

სადაც μ^* არის μ-სთან ასოცირებული გარე ზომა, ხოლო Δ სიმბოლო აღნიშნავს სიმრავლეთა სიმეტრიულ სხვაობის ოპერაციას. ყოველ $Y \subset E$ სიმრავლეს, რომლისთვისაც სრულდება ზემოთ მოყვანილი პირობებიდან მეორე, ეწოდება თითქმის G-ინვარიანტული μ-ს მიმართ. ადვილი სანახავია, რომ ასეთი Y-სთვის მარჩევსკის მეთოდით შეგვიძლია ავაგოთ μ ზომის ისეთი G-ინვარიანტული გაგრძელება μ', რომ $\mu'(Y) = 0$.

როგორც უკვე ზემოთ აღვნიშნეთ, ჩვენს მიერ განხილული ერთ-ერთი პარადოქსალური სიმრავლე არის ბერნშტეინის სიმრავლე, რომელიც 1908 წელს ბერნშტეინის მიერ იყო აგებული და განიმარტება შემდეგნაირად:

$\mathbf{R}$-ის X ქვესიმრავლეს ბერნშტეინის სიმრავლე ეწოდება, თუ X-იც და მისი დამატებაც თანაიკვეთებიან ნამდვილ რიცხვთა ღერძის ყოველ არაცარიელ სრულყოფილ ქვესიმრავლესთან.

ცნობილია, რომ თუ X არის ბერნშტეინის სიმრავლე ნამდვილ რიცხვთ $\mathbf{R}$ ღერძზე, მაშინ:

(1) $card(X \cap P) = c$, ყოველი P არაცარიელი სრულყოფილი სიმრავლისათვის $\mathbf{R}$-დან, სადაც c კონტინუუმის სიმძლავრეს აღნიშნავს;

(2) X არის ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლე. უფრო მეტიც, X არის აბსოლუტურად არაზომადი სიმრავლე ყველა არანულოვანი σ-სასრული დიფუზიური ბორელის ზომების გასრულებათა კლასის მიმართ $\mathbf{R}$-ზე;

(3) X სიმრავლეს არ აქვს ბერის თვისება.

მართებულია შემდეგი ლემა:

ლემა 2. არსებობს ბერნშტეინის სიმრავლე $X \subset \mathbf{R}$, რომელიც თითქმის ინვარიანტულია $\mathbf{R}$ ღერძის ყველა პარალელურ გადატანათა ჯგუფის მიმართ. ანუ არსებობს ისეთი X ბერნშტეინის სიმრავლე, რომლისთვისაც სამართლიანია დამოკიდებულება

$$(\forall h \in \mathbf{R})\big(card\big((h+X)\Delta X\big) < c\big).$$

ლემა 2-ის დამტკიცება მოყვანილია [52] მონოგრაფიაში.

თეორემა 10. არსებობს $X \subset \mathbf{R}$ ბერნშტეინის სიმრავლე ისეთი, რომ:

(1) არსებობს ინვარიანტული ზომა μ_1, რომელიც წარმოადგენს ლებეგის ზომის გაგრძელებას $\mathbf{R}$-ზე და $\mu_1(X) = 0$;

(2) არსებობს ინვარიანტული ზომა μ_2, რომელიც წარმოადგენს ლებეგის ზომის გაგრძელებას $\mathbf{R}$-ზე და $\mu_2(\mathbf{R}\setminus X) = 0$.

კერძოდ, X ბერნშტეინის სიმრავლე არის ფარდობითად ზომადი ლებეგის ზომის ყველა ინვარიანტული გაგრძელებათა კლასის მიმართ, მაგრამ იგივე X სიმრავლე არ ფლობს ერთადერთობის თვისებას.

თეორემის დამტკიცება ძირითადად ეყრდნობა მარჩევსკის მეთოდს და ასევე ლემა 2-ს. მარჩევსკის მეთოდში K-იდეალს (1) შემთხვევაში წარმოადგენს X სიმრავლით წარმოქმნილი σ-იდეალი, ხოლო (2) შემთხვევაში $\mathbf{R}\setminus X$ სიმრავლით წარმოქმნილი σ-იდეალი, ხოლო μ ზომის როლში გვაქვს λ ლებეგის ზომა.

პარადოქსალურ სიმრავლეთა შორის მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ჰამელის ბაზისი, რომელიც ჰამელმა ააგო 1905 წელს. ჰამელის ბაზისმა მრავალი არატრივიალური გამოყენება ჰპოვა მათემატიკის სხვადასხვა დარგში. კერძოდ კი, მათემატიკურ ანალიზში, ზომის თეორიასა და ტოლშედგენილობის თეორიაში (იხ. [25], [31], [44]). სწორედ ჰამელის ბაზისების საშუალებით იგება კოშის ფუნქციონალური განტოლების

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad (x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R})$$

ე.წ. არატრივიალური ამონახსნი.

ჰამელის ბაზისის არსებობიდან ადვილად გამომდინარეობს ლებეგის აზრით არაზომადი სიმრავლის არსებობა $\mathbf{R}$ ღერძზე (იხ. §3).

როგორც §4-ში ვაჩვენეთ, არსებობს ბერნშტეინის სიმრავლე, რომელიც იმავდროულად არის ჰამელის ბაზისიც. ამ ფაქტის საფუძველზე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი თეორემა.

თეორემა 11. არსებობს $X\subset\mathbf{R}$ ბერნშტეინის ისეთი სიმრავლე, რომ თუ μ არის რაიმე σ-სასრულო ინვარიანტული ზომა $\mathbf{R}$-ზე, მაშინ იმავე $\mathbf{R}$-ზე არსებობს ინვარიანტული ზომა μ', რომლისთვისაც სრულდება შემდეგი პირობები :

(1) μ' არის μ ზომის გაგრძელება;

(2) $X\in dom(\mu')$ და $\mu'(X)=0$.

დამტკიცება. ნაჩვენებია, რომ ყოველი ჰამელის ბაზისი აბსოლუტურად უგულვებელყოფადია ყველა σ-სასრულო ინვარიანტული ზომათა კლასის მიმართ $\mathbf{R}$-ზე. ეს ნიშნავს, რომ ყოველი ჰამელის ბაზისი აკმაყოფილებს თეორემაში მოყვანილ პირობებს. ასევე ცნობილია, რომ არსებობს ჰამელის ბაზისი რომელიც ამავდროულად არის ბერნშტეინის სიმრავლე. სწორედ ასეთი ბერნშტეინის სიმრავლეა X. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

პ. ერდოშმა და ს. კაკუტანმა ერთობლივ სტატიაში [57] დაამტკიცეს, რომ შემდეგი ორი დამოკიდებულება ექვივალენტურია ZFC თეორიის ჩარჩოებში:

(1) კონტინუუმის ჰიპოთეზა CH;

(2) არსებობს ჰამელის ბაზისების თვლადი ოჯახი $\{H_i : i\in I\}$ ისეთი, რომ

$$\mathbf{R}\setminus\{0\}=\cup\{H_i : i\in I\}.$$

მოყვანილი ექვივალენტობა გვიჩვენებს, რომ თუ მივიღებთ კონტინუუმის ჰიპოთეზას, მაშინ არსებობს ისეთი ინდექსი $i\in I$, რომლისთვისაც H_i ჰამელის ბაზისი არაზომადი იქნება წინასწარ მოცემული არანულოვანი σ-სასრულო კვაზი-ინვარიანტული μ ზომის მიმართ $\mathbf{R}$-ზე.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ პარადოქსალურ სიმრავლეთა კლასს განეკუთვნებიან ლუზინის სიმრავლეები. მოვიყვანოთ ლუზინის სიმრავლის განსაზღვრა (იხ. §4).

ვიტყვით, რომ $X\subset\mathbf{R}$ სიმრავლე არის ლუზინის სიმრავლე, თუ X არის არათვლადი სიმრავლე და ყოველი პირველი კატეგორიის Y სიმრავლისთვის $\mathbf{R}$-დან, $X\cap Y$ სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.

ცნობილია, რომ $\mathbf{R}$ ღერძის ყველა ლუზინის ქვესიმრავლე წარმოქმნის საკუთრივ σ-იდეალს. აგრეთვე ცნობილია, რომ ლუზინის სიმრავლეები ტოპოლოგიური

თვალსაზრისით პარადოქსალური სიმრავლეები არიან, რადგანაც ლუზინის სიმრავლის არც ერთ არათვლად ქვესიმრავლეს არ გააჩნია ბერის თვისება. მაგრამ ზომის თეორიის თვალსაზრისით, ლუზინის სიმრავლეები “ძალიან პატარა” სიმრავლეებს წარმოადგენენ, რადგანაც ისინი ნულზომის სიმრავლეები არიან ნებისმიერი σ-სასრულო დიფუზიური ბორელის ზომის გასრულების მიმართ (იხ. [25], [31], [44]).

მნიშვნელოვან და საინტერესო ობიექტს წარმოადგენს სერპინსკის სიმრავლე, რომელიც სერპინსკიმ 1924 წელს ააგო. §4-ში სერპინსკის სიმრავლეები განხილულია სხვადასხვა სიმრავლეებთან მიმართებაში. გავიხსენოთ მისი განსაზღვრება და განვიხილოთ სერპინსკის სიმრავლე ზომის გაგრძელების ამოცანასთან დაკავშირებით.

ვიტყვით, რომ $X \subset \mathbf{R}$ არის სერპინსკის სიმრავლე, თუ X არათვლადია და ყოველი ლებეგის აზრით ნული ზომის $Y \subset \mathbf{R}$ სიმრავლისათვის, $X \cap Y$ სიმრავლე არაუმეტეს თვლადია.

ერთი შეხედვით ზომის თეორიისათვის სერპინსკის სიმრავლეები “ძალიან ცუდ” სიმრავლეებს წარმოადგენენ, რადგანაც, როგორც ცნობილია, ყოველი სერპინსკის სიმრავლე არის პირველი კატეგორიის სიმრავლე R-ზე და სერპინსკის სიმრავლის ნებისმიერი არათვლადი ქვესიმრავრალე არ არის ლებეგის აზრით ზომადი.

ადვილია იმის დანახვა, რომ სერპინსკის სიმრავლეთა ოჯახი R-ზე წარმოქმნის σ-იდეალს, რომელიც არის ინვარიანტული R-ის ყველა პარალელურ გადატანათა ჯგუფის მიმართ.

ლემა 3. თუ $Z \subset R$ არის ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლე, რომლისთვისაც $\lambda(Z) > 0$, მაშინ არსებობს ისეთი $Y \subset Z$ არათვლადი ქვესიმრავლე, რომ $\lambda(Y) = 0$.

დამტკიცება. ამ ლემის დამტკიცება შესაძლებელია პეანოს წირების გამოყენებით, მაგრამ მოვიყვანოთ სხვა გზით დამტკიცება, რომელიც ეყრდნობა იზომორფიზმის შესახებ შემდეგ თეორემას:

ვთქვათ, E_1 და E_2 ორი პოლონური ტოპოლოგიური სივრცეა, μ_1 არის ალბათური დიფუზიური ბორელის ზომა E_1-ზე, ხოლო μ_2 არის ალბათური დიფუზიური ბორელის ზომა E_2-ზე. მაშინ არსებობს ბორელის იზომორფიზმი

$$\phi: (E_1, B(E_1)) \to \big(E_2, B(E_2)\big),$$

ისეთი, რომ

$$\big(\forall X \in B(E_1)\big)\Big(\mu_1(X) = \mu_2\big(\phi(X)\big)\Big).$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ,

$$\phi: (E_1, B(E_1), \mu_1) \to (E_2, B(E_2), \mu_2),$$

არის იზომორფიზმი ორ ალბათურ სივრცეს შორის.

დავუშვათ, μ არის ბორელის ალბათური ზომა $\mathbf{R}$ ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე, რომელიც წარმოადგენს ლებეგის ზომის ექვივალენტურ ზომას და ვთქვათ $\nu = \mu \otimes \mu$. იზომორფიზმის თეორემის თანახმად ν და μ არიან ϕ-იზომორფულები, სადაც ϕ არის გარკვეული ბორელის იზომორფიზმი $\mathbf{R}$-სა და $\mathbf{R}^2$-ს შორის. ახლა ვთქვათ, Z

არის $\mathbf{R}$ -ის ისეთი ბორელის ქვესიმრავლე, რომ $\lambda(Z) > 0$. რადგან μ და λ ექვივალენტური ზომებია, ასევე გვექნება $\mu(Z) > 0$. განვსაზღვროთ Z' სიმრავლე შემდეგნაირად

$$Z' = \phi(Z) \subset \mathbf{R}^2.$$

ასეთნაირად განსაზღვრული Z' სიმრავლე არის ν -ზომადი და, მაშასადამე, $\nu(Z') > 0$.

ცხადია, Z' სიმრავლის $pr_1(Z')$ პროექცია $\mathbf{R}$ ღერძზე იქნება არათვლადი და ზომადი სიმრავლე μ-ს მიმართ. ფუბინის ცნობილი თეორემის თანახმად,

$$\{x \in \mathbf{R}: \{y \in \mathbf{R}: (x,y) \in Z'\} \in dom(\mu) \,\&\, \mu(\{y \in \mathbf{R}: (x,y) \in Z'\}) > 0\}$$

სიმრავლე კონტინუუმის სიმძლავრისაა. ამ ფაქტიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს Z' სიმრავლის μ -ზომად წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ არათვლად ქვესიმრავლეთა ისეთი ოჯახი $\{Z'_j : j \in J\}$, რომ

$$(\forall j \in J)\big(card\big(Z'_j\big) = c\big).$$

განვიხილოთ არათვლად თანაუკვეთ სიმრავლეთა ოჯახი $\{\phi^{-1}\big(Z'_j\big) : j \in J\}$, სადაც თითოეული სიმრავლე არის Z სიმრავლის ქვესიმრავლე, μ -ზომადია და კონტინუუმის სიმძლავრის. გავიხსენოთ, რომ μ არის ალბათური ზომა, ამიტომ მარტივად მივიღებთ, რომ $\{\phi^{-1}\big(Z'_j\big) : j \in J\}$ ოჯახის არათვლადი რაოდენობა წევრების არის μ ზომის მიმართ ნულზომადი. მაშასადამე, ლებეგის ზომის მიმართაც ნულოვანი ზომის სიმრავლე.

ამით ლემა დამტკიცებულია.

ახლა დავუშვათ, რომ სრულდება კონტინუუმის ჰიპოთეზა და $X \subset \mathbf{R}$ არის სერპინსკის სიმრავლე. ცხადია, $\lambda^*(X)>0$. აღვნიშნოთ X'-ით X სიმრავლის ზომადი გარსი და განვსაზღვროთ X სიმრავლის ქვესიმრავლეების S' σ -ალგებრა შემდეგნაირად:

$$S' = \{X \cap Y : Y \subset X', Y \in dom(\lambda)\}.$$

მარჩევსკის მეთოდის გამოყენებით, ჩვენ შეგვიძლია განვსაზღვროთ λ' ფუნქციონალი S'-ზე შემდეგნაირად:

$$\lambda'(X \cap Y) = \lambda(Y) \quad \big(Y \subset X', Y \in dom(\lambda)\big).$$

ცხადია, λ' განსაზღვრავს დიფუზიურ σ -სასრულ ზომას სერპინსკის X სიმრავლეზე და $\lambda'(X) > 0$. ამასთან, ყველა λ' -ნულზომის X -ის ქვესიმრავლეები არაუმეტეს თვლადია სერპისნსკის სიმრავლის ძირითადი თვისების გამო. აქედან ცხადია, რომ ლემა 3 არ სრულდება λ' ზომისთვის, ე.ი. λ' არ არის $\lambda' \otimes \lambda'$ ზომის იზომორფული.

ლემა 4. სერპინსკის სიმრავლეებისგან წარმოქმნილ σ-იდეალის ყოველი წევრის შიგა ზომა ნულის ტოლია.

ეს ლემა უშუალოდ გამომდინარეობს ლემა 3-დან და სერპინსკის სიმრავლის განსაზღვრებიდან.

თეორემა 12. არსებობს ლებეგის ზომის ისეთი ინვარიანტული μ გაგრძელება, რომლის მიმართაც ყველა სერპინსკის სიმრავლე ზომადია და მათგან ყველას აქვს μ-ზომა ნული.

დამტკიცება. იმისათვის, რომ დავამტკიცოთ ეს თეორემა გამოვიყენოთ მარჩევსკის მეთოდი.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ოთხეული (E, G, S, μ) და K არის E სივრცის ბულეანის ისეთი თვლადად ადიტიური G -ინვარიანტული იდეალი, რომ სამართლიანია

$$(\forall Y \in K)(\ \mu_*(Y) = 0)$$

ტოლობა. მაშინ არსებობს μ ზომის გაგრძელება $\bar{\mu}$ განსაზღვრული პირობით

$$\bar{\mu}\left((Z \cup Z')\backslash Z''\right) = \mu(Z),$$

სადაც Z ნებისმიერი μ-ზომადი სიმრავლეა საბაზისო E სივრცეში, ხოლო Z' და Z'' არიან K იდეალის ნებისმიერი ელემენტები.

ჩვენს შემთხვევში E საბაზისო სიმრავლის როლში გვაქვს $\mathbf{R}$ ნამდვილ რიცხვთა ღერძი, μ ზომის როლში λ ლებეგის ზომა, ხოლო K იდეალი წარმოქმნილია სერპინსკის სიმრავლეებით. ლემა 3-ის და ლემა 4-ის გამოყენებით უშუალოდ გამომდინარეობს თეორემის მართებულობა.

§8. $\mathbf{R}^N$ სივრცეში ინვარიანტული ბორელის ზომის ინვარიანტული არასეპარაბელური გაგრძელებები და ერთადერთობის თვისება

კარგად არის ცნობილი, რომ ზომის თეორიის ერთ-ერთი ფუნდამენტურ პრობლემას წარმოადგენს შემდეგი ამოცანა:

E საბაზისო სიმრავლეზე განსაზღვრული არანულოვანი σ -სასრული დიფუზიური ზომის გაგრძელება E სიმრავლის ქვესიმრავლეთა რაც შეიძლება ფართო კლასზე.

საზოგადოდ ცნობილია, რომ შეუძლებელია (ZFC) თეორიის ფარგლებში განისაზღვროს არანულოვანი σ-სასრული დიფუზიური ზომა E სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა კლასზე. როგორც წინა პარაგრაფში ვნახეთ, არსებობს ზომის სხვადასხვა გაგრძელების კონსტრუქციები, რომელთა საშუალებითაც მოცემული ზომა გრძელდება საბაზისო სივრცის ისეთ ქვესიმრავლეებზე, რომლებიც პარადოქსალურ სიმრავლეებს წარმოადგენენ საწყისი ზომის მიმართ. თავიდანვე შევნიშნოთ, რომ სეპარაბელური ზომის გაგრძელების პროცესში შესაძლებელია მივიღოთ არასეპარაბელური ზომაც კი, უფრო მეტიც, არასეპარაბელური ზომათა მდიდარი ოჯახიც (იხ. [39], [44], [58], [59], [60], [62]).

ამ პარაგრაფში ჩვენს მიერ ნაჩვენები იქნება, რომ უსასრულოგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეში, კერძოდ ნამდვილ რიცხვთა ყველა შესაძლო მიმდევრობების R^N სივრცეში არსებობს არანულოვანი σ -სასრულო ბორელის ინვარიანტული ზომის არასეპარაბელური ინვარიანტული გაგრძელება, რომელიც ინარჩუნებს ერთადერთობის თვისებას. უფრო მეტიც, აიგება ამ საწყისი ზომის ინვარიანტულ არასეპარაბელურ გაგრძელებათა უდიდესი შესაძლო სიმძლავრის მქონე ოჯახი.

წინასწარ გავიხსენოთ რამდენიმე მნიშვნელოვანი ცნება.

ვთქვათ, μ არის σ -სასრული ზომა E საბაზისო სიმრავლეზე. $X \subset E$ ქვესიმრავლეს ეწოდება μ-მასიური თუ $\mu_*(E \setminus X) = 0$, სადაც μ_* არის μ ზომასთან ასოცირებული შიგა ზომა.

დავუშვათ, E არის არათვლადი სიმრავლე, S არის E -ს რომელიღაც ქვესიმრავლეებით წარმოქმნილი σ -ალგებრა და μ არის σ-სასრული ზომა E-ზე ისეთი, რომ $dom(\mu) = S$. ნებისმიერი ორი $X \in S$ და $Y \in S$ სიმრავლისათვის, სადაც $\mu(X) < \infty$ და $\mu(Y) < \infty$, შემოგვაქვს $d(X, Y)$ რიცხვი:

$$d(X, Y) = \mu(X \Delta Y)$$

ასეთნაირად განსაზღვრული d ფუნქციონალი არის კვაზი-მეტრიკა (ან ფსევდო-მეტრიკა) S-ზე. შესაბამისი ფაქტორიზაციის შემდეგ მივიღებთ მეტრიკულ სივრცეს, რომელიც კანონიკურად ასოცირდება μ ზომასთან.

მიღებული მეტრიკული სივრცის ტოპოლოგიურ წონას ეწოდება μ ზომის წონა (ან μ ზომის მახასიათებელი). μ ზომას ეწოდება არასეპარაბელური ზომა, თუ ზემოთ განსაზღვრული მეტრიკული სივრცე არის არასეპარაბელური სივრცე. ე.ი. μ ზომის წონა მკაცრად მეტია პირველ თვლად კარდინალურ ω რიცხვზე.

ლემა 5. დავუშვათ E საბაზისო სიმრავლეა და μ არის σ-სასრული ზომა E-ზე. მაშინ შემდეგი ორი დამოკიდებულება ექვივალენტურია:

1) μ არის არასეპარაბელური;

2) არსებობს $\varepsilon > 0$ ნამდვილი რიცხვი და E საბაზისი სიმრავლის μ-ზომადი ქვესიმრავლეების ისეთი არათვლადი $\{Y_\xi : \xi < \omega_1\}$ ოჯახი, რომ

$$\mu(Y_\xi \Delta Y_\zeta) \geq \varepsilon, \quad (\xi < \omega_1, \zeta < \omega_1, \xi \neq \zeta).$$

ლემა 5-ის დამტკიცება მოყვანილია [53]-ში.

ისტორიულად, მათემატიკისათვის ესოდენ მნიშვნელოვანი პრობლემა - ზომის არასეპარაბელური გაგრძელების ამოცანა - ჩამოყალიბდა **R** ნამდვილ რიცხვთა ღერძზე ლებეგის სტანდარტული ზომის არასეპარაბელური ინვარიანტული გაგრძელებების არსებობის კუთხით. ამ პრობლემას ცნობილი მათემატიკოსები იკვლევდნენ და შესაბამისი შედეგები მიღებულია სხვადასხვა შრომებში (იხ. [55], [60], [61]). უფრო მეტიც, ზემოთ მოყვანილი პრობლემა გაფართოვდა და განხილული იქნა ჰაარის ზომისათვის არათვლად მეტრიზებად კომპაქტურ ტოპოლოგიურ ჯგუფზე და σ-სასრულო ინვარიანტული ზომისთვის სხვადასხვა ტიპის არათვლად ჯგუფებზე (იხ. [31], [63], [64], [65], [66]).

შემდეგი ლემის დამტკიცება ეფუძნება სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდს (იხ. [63]). სიურექციული ჰომომორფიზმების მეთოდის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს პირდაპირი ნამრავლის მეთოდი, რომელიც გამოიყენება ინვარიანტული და კვაზი-ინვარიანტული ზომების თეორიაში.

განვიხილოთ უფრო დეტალურად ხსენებული მეთოდი.

დავუშვათ, მოცემულია σ-სასრული ინვარიანტული ზომებით აღჭურვილი ორი (G_1, μ_1) და (G_2, μ_2) ჯგუფი და დავუშვათ ასევე, რომ

$$f: G_1 \rightarrow G_2$$

არის სიურექციული ჰომომორფიზმი. ვთქვათ, $X \subset G_2$ სიმრავლეს გააჩნია რაიმე ზოგადი თვისება $P(X)$ და აგრეთვე დავუშვათ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ლოგიკურ დამოკიდებულებას:

$$P(f^{-1}(X)) \Leftrightarrow P(X).$$

ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ $P(X)$ თვისება მდგრადია სიურექციული f ჰომომორფიზმის მიმართ. კერძოდ, თუ f არის კანონიკური სიურექციული ჰომომორფიზმი

$$pr_2: H \times G_2 \rightarrow G_2, \quad (G_1 = H \times G_2),$$

მაშინ ადგილი აქვს პირდაპირი ნამრავლის მეთოდს, რომელიც წმინდა ალგებრული ხასიათისაა.

აქვე აღვნიშნოთ, რომ პირდაპირი ნამრავლის მეთოდი ინვარიანტული ზომის თეორიაში პირველად გამოყენებული იქნა ა. ხარაზიშვილის მიერ, როცა მან ამოხსნა სერპინსკის ცნობილი პრობლემა (იხილეთ, [52]), შემდეგ კი ეს მეთოდი არაერთხელ იქნა გამოყენებული სხვა ავტორების მიერ. იხილეთ, [63], [65] და სხვა.

ლემა 6. დავუშვათ $(E_i, \mu_i)(1 \leq i \leq n)$ არის ზომადი სივრცეების სასრული ოჯახი, აღჭურვილი არანულოვანი σ-სასრული ზომებით. მაშინ შემდეგი ორი წინადადება ექვივალენტურია:

(1) ზომათა ნამრავლი $\prod_{1 \leq i \leq n} \mu_i$ არასეპარაბელურია;

(2) ერთი მაინც ზომა $\{\mu_i: 1 \le i \le n\}$ მოცემული ოჯახიდან არასეპარაბელურია.

დამტკიცება: $(1) \Rightarrow (2)$ იმპლიკაცია სამართლიანია, რადგან ადვილად მოწმდება, რომ σ-სასრულ სეპარაბელურ ზომათა ნამრავლი ყოველთვის სეპარაბელურია.

დავამტკიცოთ $(2) \Rightarrow (1)$. დავუშვათ სამართლიანია (2) და μ_{i_0} $(1 \le i_0 \le n)$ არის σ-სასრული არასეპარაბელური ზომა. განვიხილოთ ასახვა

$$pr_{i_0}: \prod_{1 \le i \le n} \mu_i \to \mu_{i_0}.$$

ეს ასახვა წარმოადგენს ზომების სიურექციულ ჰომომორფიზმს. თუ გამოვიყენებთ ზემოთ აღწერილ სიურექციული ჰომომორფიზმის მეთოდს, მივიღებთ ლემა 6-ის დამტკიცებას.

მეტად მნიშვნელოვანია მოცემული ზომის ისეთი ინვარიანტული არასეპარაბელური გაგრძელებების შესწავლა, რომლებსაც ერთადერთობის თვისება გააჩნიათ.

კარგად არის ცნობილი, რომ ინვარიანტული ზომების ერთადერთობის თვისება თამაშობს უმნიშვნელოვანეს როლს თანამედროვე ანალიზისა და ზოგადი ტოპოლოგიის სხვადასხვა ამოცანების გადასაჭრელად. მაგალითად, ჰაარის ზომა ლოკალურად კომპაქტურ ტოპოლოგიურ ჯგუფზე ფლობს ერთადერთობის თვისებას (იხ. [39], [44], [58], [60], [67]). სწორედ ამ ფაქტიდან გამომდინარეობს ბევრი მნიშვნელოვანი შედეგი აბსტრაქტულ ჰარმონიულ ანალიზში, დინამიკურ სისტემათა თეორიაში, სტოქასტურ პროცესთა ზოგად თეორიაში და ა.შ.

მოვიყვანოთ ინვარიანტული ზომის ერთადერთობის თვისების განსაზღვრა ორი სახით.

ვთქვათ, E არის არაცარიელი სიმრავლე, G კი E-ს გარდაქმნათა რაიმე ჯგუფი. M-ით აღვნიშნოთ σ-სასრულო G-ინვარიანტულ ზომათა კლასი E-ზე. ვიტყვით, რომ $\mu_1 \in M$ ზომა ფლობს ერთადერთობის თვისებას M-ში, თუ ყოველი $\mu_2 \in M$ ზომისთვის $dom(\mu_1) = dom(\mu_2)$ დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს $\mu_1 = \mu_2$ ტოლობა.

ვთქვათ, E არის არაცარიელი სიმრავლე, G ამ სიმრავლის გარდაქმანათა რაიმე ჯგუფია, ხოლო μ_1 კი E-ს რომელიმე σ-ალგებრაზე განსაზღვრული σ-სასრულო G-ინვარიანტული ზომაა. ვიტყვით, რომ μ_1ზომა ფლობს ერთადერთობის თვისებას, თუ $dom(\mu_1)$-ზე განსაზღვრული ყოველი σ-სასრულო G-ინვარიანტული μ_2 ზომისთვის არსებობს $q \in \mathbf{R}^+$ კოეფიციენტი (დამოკიდებული μ_2 ზომაზე) ისეთი, რომ $\mu_2 = q \cdot \mu_1$. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, μ_1 და μ_2 ზომები არიან პროპორციულები.

ბევრ შემთხვევაში პროპორციული ზომები არიან გაიგივებულები, ამიტომ მოყვანილი განსაზღვრება შეიძლება დაყვანილი იქნას პირველ განსაზღვრებამდე.

ერთადერთობის თვისება სტანდარტული λ_n ლებეგის ზომისათვის n-განზომილებიან ევკლიდურ $\mathbf{R}^n$ სივრცეში და ჰაარის ზომის გასრულებისათვის არათვლად ლოკალურად კომპაქტურ σ-კომპაქტურ ტოპოლოგიურ ჯგუფზე შეიძლება აღიწეროს ორი განსხვავებული თვალსაზრისით:

(ა) ტოპოლოგიური კუთხით;

(ბ) სიმრავლურ-თეორიული კუთხით.

მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი, რომლებიც წინა ფრაზის ილუსტრაციას წარმოადგენენ.

მაგალითი 7. დავუშვათ G არის $\mathbf{R}^n$-ის ყველა იზომეტრიულ გარდაქმნათა ქვეჯგუფი. მაშინ შემდეგი ორი დამოიკიდებულება არის ექვივალენტური:

(1) λ_n ლებეგის ზომა ფლობს ერთადერთობის თვისებას;

(2) ყოველი $x \in \mathbf{R}^n$ წერტილისათვის $G(x)$ ორბიტა არის არათვლადი და ყველგან მკვრივი R^n-ში.

კერძოდ, თუ G არის $\mathbf{R}^n$-ის ყველა პარალელურ გადატანათა (ტრანსლაციათა) ქვეჯგუფი, მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებების ექვივალენტობა:

(1) λ_n ლებეგის ზომა ფლობს ერთადერთობის თვისებას;

(2) G ჯგუფი არის არათვლადი და ყველგან მკვრივი $\mathbf{R}^n$-ში.

მაგალითი 8. დავუშვათ, G არის არათვლადი ლოკალური კომპაქტური σ-კომპაქტური ტოპოლოგიური ჯგუფი, H არის G-ს ქვეჯგუფი და μ' არის $H-$ ინვარიანტული ჰაარის ზომის გასრულება $G-$ ზე. მაშინ შემდეგი დამოკიდებულებები ექვივალენტურია:

(1) μ' ფლობს ერთადერთობის თვისებას;

(2) H ჯგუფი არის არათვლადი და ყველგან მკვრივი G-ში.

შევნიშნოთ, რომ მაგალით 7-ში მოყვანილი შედეგი არ არის სამართლიანი ბორელის სტანდარტული ზომისთვის $\mathbf{R}^n$-ში, რადგან ბორელის ზომა არ არის სრული ზომა. განვიხილოთ შესაბამისი მაგალითი.

მაგალითი 9. დავუშვათ, b_n არის სტანდარტული ბორელის ზომა $\mathbf{R}^n$-ში და დავუშვათ $n \geq 2$. განვიხილოთ $G = Q \times \mathbf{R}^{n-1}$ ჯგუფი. იგი არის არათვლადი ყველგან მკვრივი ჯგუფი $\mathbf{R}^n$-ში. ყოველი ბორელის $X \subset \mathbf{R}^n$ სიმრავლისათვის განვსაზღვროთ ν ფუნქციონალი შემდეგნაირად

$$\nu(X) = \sum_{q \in Q} b_{n-1}\big(X \cap (\{q\} \times \mathbf{R}^{n-1})\big).$$

განსაზღვრული ν ფუნქციონალი არის არანულოვანი σ-სასრულო G-ინვარიანტული ბორელის ზომა $\mathbf{R}^n$-ში. მაგრამ ადვილია იმის შემჩნება რომ ν არ არის b_n-ის პროპორციული, ე.ი. ამ შემთხვევაში b_n არ ფლობს ერთადერთობის თვისებას (მეორე განსაზღვრის თვალსაზრისით).

ახლა ვთქვათ, E არის არაცარიელი სიმრავლე, G ამ სიმრავლის გარდაქმანათა რაიმე ჯგუფია, ხოლო μ კი E-ს რომელიმე σ-ალგებრაზე განსაზღვრული σ-სასრულო G-ინვარიანტული ზომაა. ვიტყვით, რომ μ-ს გააჩნია მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისება (ანუ ერგოდულობა), თუ ნებისმიერი μ-ზომადი $X \subset E$ სიმრავლისათვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\mu(X) > 0$, არსებობს თვლადი ოჯახი $\{g_n : n < \omega\} \subset G$ ისეთი, რომ

$$\mu(E\setminus\bigcup_{n\in N} g_n(X)) = 0.$$

ისევე, როგორც ერთადერთობის თვისების შემთხვევაში λ_n ლებეგის ზომისათვის მეტრიკული ტრანზიტულობა შეიძლება ჩამოყალიბდეს წმინდა ტოპოლოგიურ ტერმინებში.

მაგალითი 10. თუ G არის $\mathbf{R}^n$-ის პარალელურ გადატანათა (ტრანსლაციათა) რაიმე ჯგუფი, მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებების ექვივალენტობა:
(1) λ_n ლებეგის ზომა არის მეტრიკულად ტრანზიტული;
(2) G ჯგუფი არის ყველგან მკვრივი $\mathbf{R}^n$-ში.

მაგალითი 9 და მაგალითი 10 ერთობლივად აჩვენებენ, რომ ლებეგის ზომისათვის ერთადერთობის თვისება და მეტრიკული ტრანზიტულობა ერთმანეთის ექვივალენტურია.

ზოგადად, ინვარიანტული ზომის ერთადერთობის თვისება პირდაპირ კავშირშია ამავე ზომის მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისებასთან (ერგოდულობასთან). კერძოდ, თუ E არის არაცარიელი სიმრავლე, G არის E სიმრავლის გარდაქმნათა არათვლადი ჯგუფი თავისუფლად მოქმედი E-ში და μ არის სრული σ-სასრული G-ინვარიანტული ზომა E-ზე, მაშინ შემდეგი ორი წინადადება ექვივალენტურია:
(1) μ ფლობს ერთადერთობის თვისებას;
(2) μ არის მეტრიკულად ტრანზიტული.
(2)$\Rightarrow$(1) იმპლიკაციის დამტკიცება იხ. [68]

ადვილია ჩვენება იმისა, რომ თუ ინვარიანტულ ზომა ფლობს ერთადერთობის თვისებას, მაშინ ის არის მეტრიკულად ტრანზიტული.

მართლაც, დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, μ არ ფლობს მეტრიკული ტრანზიტულობის თვისებას. ეს წინადადება ექვივალენტურია იმისა, რომ არსებობს საბაზისო სივრცის დაშლა $\{A, B\}$ სიმრავლეებად, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს:

$$A \in dom(\mu), B \in dom(\mu), \mu(A) > 0, \mu(B) > 0,$$
$$(\forall g)(g \in G \Rightarrow \mu(A\Delta g(A)0 = 0 \ \& \ \mu\big(B\Delta g(B)\big) = 0.$$

ცხადია, რომ ნებისმიერი $\Delta \subset E$ ზომადი სიმრავლისათვის შესრულებულია ტოლობა

$$\mu(\Delta) = \mu(\Delta \bigcap A) + \mu(\Delta \bigcap B).$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ ან $\mu(\Delta \bigcap A) > 0$, ან $\mu(\Delta \bigcap B) > 0$. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $0 < \mu(\Delta \bigcap A) < +\infty$.

განვსაზღვროთ $\bar{\mu}$ ზომა შემდეგი პირობით:

$$(\forall Z)\left(Z \in dom(\mu) \Rightarrow \overline{\mu}(Z) = \frac{\mu(Z \bigcap A)}{\mu(\Delta \bigcap A)} \right).$$

ცხადია, რომ თუ $\mu(B) > 0$ მაშინ $\overline{\mu}(B) = 0$, რაც იმას მიანიშნებს, რომ

$\mu \neq q \cdot \bar{\mu} \quad (q \in R).$

მივიღეთ წინააღმდეგობა ჩვენ დაშვებასთან, რაც იმას ნიშნავს, რომ μ არის მეტრიკულად ტრანზიტული.

მართებულია შემდეგი დებულებები.

ლემა 7. ვთქვათ, $(E_i, G_i, \mu_i), (i \in I)$ არაატომურ ალბათურ G_i-ინვარიანტულ ზომიან სივრცეთა არათვლადი ოჯახია. თუ ყოველი μ_i ზომა ფლობს ერთადერთობის თვისებას, მაშინ ზომათა ნამრავლი $\prod_{i \in I} \mu_i$ არის არასეპარაბელური, $\prod_{i \in I} G_i$ -ინვარიანტული ალბათური ზომა, რომელიც ფლობს ერთადერთობის თვისებას.

ამ ლემის დამტკიცებისას მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ σ-სასრულო ზომის ინვარიანტულობის თვისება შენარჩუნებადია ალგებრიდან მის მიერ წარმოქმნილ σ-ალგებრაზე გადასვლის დროს. ანალოგიური თვისება σ-სასრულო კვაზიინვარიანტული ზომებისათვის საზოგადოდ არ არის მართებული. სათანადო კონტრმაგალითის შესახებ იხ. [68]

ლემა 8. დავუშვათ $(E_i, G_i, \mu_i), (1 \le i \le n)$ არანულოვანი σ -სასრულო G_i -ინვარიანტულ ზომიან სივრცეთა სასრული ოჯახია და ყოველი μ_i ზომა არის მეტრიკულად ტრანზიტული G_i -ის თვლადი ქვეჯგუფის მიმართ. თუ ერთი მაინც ზომა ამ ოჯახიდან არის არასეპარაბელური, მაშინ ზომათა ნამრავლი $\prod_{1 \le i \le n} \mu_i$ არის σ -სასრულო არასეპარაბელური, $\prod_{1 \le i \le n} G_i$ -ინვარიანტული ზომა და მეტრიკულად ტრანზიტული $\prod_{1 \le i \le n} G_i$ ნამრავლის მიმართ.

შენიშვნა 1. [55] სტატიაში $\mathbf{R}^n$ -სათვის აგებული იყო λ_n ლებეგის ზომის არასეპარაბელური, ინვარიანტული გაგრძელება μ ისეთი, რომ μ -სთან ასოცირებული მეტრიკული სივრცის ტოპოლოგიური წონა უდრის 2^c -ს. აქვე შევნიშნოთ, რომ μ ზომა არ ფლობს ერთადერთობის თვისებას.

[64] სტატიაში აგებული იქნა λ_n ლებეგის ზომის არასეპარაბეული, ინვარიანტული გაგრძელება μ ისეთი, რომ μ -სთან ასოცირებული მეტრიკული სივრცის ტოპოლოგიური წონა უდრის c-ს. μ ზომას აქვს ერთადერთობის თვისება, მაგრამ სტატიის ავტორებს ეს მნიშვნელოვანი ფაქტი არ ჰქონდათ შემჩნეული.

შემდგომ, [63] და [66] სტატიებში ნაჩვენები იქნა, რომ არსებობს λ_n ლებეგის ზომის უამრავი არასეპარაბელური σ-სასრული ინვარიანტული გაგრძელება, მაგრამ მათგან უმრავლესობას არ აქვს ერთადერთობის თვისება.

საზოგადოდ, არათვლადი σ -კომპაქტური ლიკალურად კომპაქტური G ჯგუფი აკმაყოფილებს ტოლობას

$$\left(card(G)\right)^{\omega} = card(G)$$

და G -ში არსებობს ჰაარის ზომის არასეპარაბელური გაგრძელება. მაგრამ აღვნიშნოთ, რომ ცნობილ მეთოდებს ვერ გამოვიყენებთ იმ შემთხვევაში, როცა card(H) კოფინალურია ω-სთან.

1976 წელს გამოქვეყნებულ სტატიაში [61] განსხვავებული მეთოდის გამოყენებით ნამდვილ რიცხვთა $\mathbf{R}$ ღერძზე აგებულ იქნა λ_1 ლებეგის ზომის არასეპარაბეული σ -სასრულო μ გაგრძელება ისეთი, რომ μ ფლობს მეტრიკული ტრანზიტულობის

თვისებას და μ-სთან ასოცირებული მეტრიკული სივრცის ტოპოლოგიური წონა უდრის c-ს. ცხადია, რომ μ-ს გასრულებას ფლობს ერთადერთობის თვისებას.

კერძოდ, მართებულია შემდეგი დებულება:

დებულება 11. ნამდვილ რიცხთა $\mathbf{R}$ ღერძზე არსებობს ლებეგის ერთგანზომილებიანი სტანდარტული ზომის ინვარიანტული არასეპარაბელური გაგრძელება μ, რომელიც ფლობს ერთადერთობის თვისებას.

ამ დებულების დამტკიცება მოყვანილია [61] შრომაში

შევნიშნოთ, რომ დებულება 11-ის დამტკიცება ეყრდნობა ლებეგის ზომის მიმართ მასიური სიმრავლეების არსებობას, რომლებიც არიან თითქმის ინვარიანტული სიმრავლეები. სწორედ ასეთი სიმრავლეების ხარჯზე ხდება ლებეგის აზრით ზომადი ქვესიმრავლეებით წარმოქმნილი σ-ალგებრის გაფართოება.

აქვე გვინდა აღვნიშნოთ, რომ ანალოგიური სიმრავლეების არსებობა და მათ ხარჯზე არასეპარაბელური ზომის აგება შესაძლებელია ნამდვილ რიცხვთა ყველა შესაძლო მიმდევრობების $\mathbf{R}^N$ სივრცეშიც (იხ. [69].

შენიშვნა 2. პირდაპირი ნამრავლის მეთოდი ხშირად გამოიყენება უსასრულო განზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეებზე მოცემული ინვარიანტული ზომების არასეპარაბელური გაგრძელებების ასაგებად. [53]-ში აგებულია არანულოვანი σ-სასრულო ინვარიანტული ბორელის ზომა χ უსასრულო განზომილებიანი ტოპოლოგიური $\mathbf{R}^N$ ვექტორული სივრცისთვის, რომელიც მეტრიკულად ტრანზიტულია $\mathbf{R}^N$-ის ყველგან მკვრივი ვექტორული ქვესივრცის მიმართ. მეორეს მხირვ, ევკლიდურ R^n სივრცეში არსებობს μ ზომა, რომელიც არის არასეპარაბელური, მეტრიკულად ტრანზიტული, ინვარიანტული $\mathbf{R}^n$-ის ყველგან მკვრივი Γ ქვეჯგუფისათვის და წარმოადგენს ლებეგის სტანდარტული λ_n ზომის გაგრძელებას $\mathbf{R}^n$-ში (იხ.[61]).

პირდაპირი ნამრავლის მეთოდისა და ლემა 8-ის გამოყენებით შესაძლებელია ავაგოთ ზომათა ნამრავლი $\chi\times\mu$, რომელიც არის არასეპარაბელური, ინვარიანტული $\mathbf{R}^N$-ის ყველგან მკვრივი ქვეჯგუფის მიმართ და ამავე ჯგუფის მიმართ მეტრიკულად ტრანზიტული. ამასთან $\chi\times\mu$ გასრულებას აქვს ერთადერთობის თვისება.

სხვა მეთოდის გამოყენებით შესაძლებელია აიგოს χ ზომის მრავალი მეტრიკულად ტრანზიტული გაგრძელება იმავე $\mathbf{R}^N$ უსასრულოგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეში.

დავუშვათ $L=\{\mu_j : j\in J\}$ არის $\mathbf{R}$-ზე λ ლებეგის სტანდარტული ზომის გაგრძელებათა კლასი, სადაც ყოველი μ_j ზომა არის ინვარიანტული და მეტრიკულად ტრანზიტული რაიმე $\mathbf{R}$ ადიციური ჯგუფის Γ_j ყველგან მკვრივი ქვეჯგუფისათვის. კარგად არის ცნობილი, რომ

$$card(J)=2^{2^c}.$$

ამ ფაქტის შესახებ იხ. მაგალითად [52].

ახლა დავუშვათ, რომ ყოველი $i<\omega$-სთვის Δ_i სიმბოლო აღნიშნავს [0,1] სეგმენტს.

ცხადია,

$$\mu_j(\Delta_i)=1 \quad (j\in J).$$

აღვნიშნოთ

$$A_n = \prod\{\mathrm{R}_i, i \leq n\} \times \prod\{\Delta_i, i > n\},$$

სადაც $\mathrm{R}_i = \mathbf{R}$, ყოველ ნატურალური i რიცხვისათვის.

დავაფიქსიროთ $j \in J$ ინდექსი და ყოველი $i < \omega$ ინდექსისათვის აღვნიშნოთ $\theta_i = \mu_j$. აგრეთვე, ყოველი $n < \omega$ რიცხვისათვის შემოვიტანოთ შემდეგნაირად განსაზღვრული ზომა ν_n:

$$\nu_n = \mu \times \prod\{\theta_i, i < n\} \times \prod\{\lambda_i, i \geq n\},$$

სადაც $\lambda_i = \bar{\lambda}$, ყველა ნატურალური $i \geq n$ რიცხვისათვის.

ახლა განვიხილოთ $\overline{\nu_n}$ ზომა, რომელიც $\mathbf{R}^N$-ზე განსაზღვრულია შემდეგნაირად

$$\overline{\nu_n}(X) = \nu_n(X \cap A_n),$$

სადაც X არის ნებისმიერი ქვესიმრავლე R^N-ის ისეთი, რომ $X \cap A_n$ არის ν_n ზომადი.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$S = \{X \subset \mathbf{R}^N : X \cap A_n \in dom(\nu_n), n \in N\}.$$

შევნიშოთ, რომ S არის R^N სივრცის ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრა.

შემოვიტანოთ ჯგუფი

$$G = \Gamma + \sum\{G_i : i < \omega\},$$

სადაც $G_i = \Gamma_j$, ყველა i ნატურალური რიცვისათვის.

ლემა 9. ფუნქციონალი ν, რომელიც განისაზღვრება ტოლობით

$$\mu(X) = \lim_{n\to\infty} \overline{\nu_n}(X)$$

არის S-ზე განსაზღვრული ზომა, რომელიც წარმოადგენს χ ზომის გაგრძელებას და არის σ-სასრულო, არასეპარაბელური, G-ინვარიანტული და მის გასრულებას აქვს ერთადერთობის თვისება.

თეორემა 13. $\mathbf{R}^N$ სივრცეზე მოცემული χ ბორელის σ-სასრულო ზომის ინვარიანტულ, არასეპარაბელურ და ერთადერთობის თვისების მქონე ზომათა გაგრძელებების კლასის სიმძლავრე არის 2^{2^c}.

დამტკიცება. თეორემა ადვილად მტკიცდება ლემა 9–ისა და

$$card(J) = 2^{2^c}$$

ტოლობის გათვალისწინებით.

§9. ნამდვილმნიშვნელობიანი ფუნქციების ფარდობითად ზომადობის თვისება ზომათა გარკვეული კლასების მიმართ

როგორც დავინახეთ, უსასრულოგანზომილებიან ტოპოლოგიურ ვექტორულ სივრცეში არსებობს ინვარიანტული ბორელის ზომის უდიდესი შესაძლო სიმძლავრის მქონე არასეპარაბელურ გაგრძელებათა ოჯახი. ასევე ცნობილია, რომ ამავე სივრცეში არსებობს კონტინუუმის სიმძლავრის მქონე ბორელის σ-სასრულ ინვარიანტულ ზომათა ოჯახიც.

ამ პარაგრაფში ჩვენს მიერ გამოკვლეულ იქნება ნამდვილმნიშვნელობებიანი ფუნქციების ფარდობითად ზომადობის თვისება ზომათა ზემოთ მითითებული ორი ოჯახის მიმართ. გავიხსენოთ შემდეგი ცნება.

დავუშვათ E არის რაიმე საბაზისო სიმრავლე და M არის E-ზე განსაზღვრულ ზომათა კლასი. ვიტყვით, რომ ფუნქცია $f: E \to \mathbf{R}$ არის ფარდობითად ზომადი ფუქნცია M ზომათა კლასის მიმართ, თუ არსებობს ერთი მაინც $\mu \in M$ ზომა ისეთი, რომ f ფუნქცია ზომადია μ-ს მიმართ. წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ f აბსოლუტურად არაზომადი ფუნქციაა ზომათა M კლასის მიმართ.

ლემა 10. დავუშვათ (E, S) არის რაიმე ზომადი სივრცე. შემდეგი ორი წინადადება ექვივალენტურია:

1. S არის E სიმრავლის თვლადი რაოდენობა ქვესიმრავლეებით წარმოქმნილი σ-ალგებრა;
2. არსებობს ზომადი ფუნქცია $f: E \to \mathbf{R}$ ისეთი, რომ

$$S = \{f^{-1}(B): B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})\}.$$

ლემა 11. თუ S არის თვლადი რაოდენობა ქვესიმრავლეებით წარმოქმნილი σ-ალგებრა $\mathbf{R}$-ზე, მაშინ მასზე განსაზღვრული ყოველი σ-სასრული μ ზომა არის სეპარაბელური.

შენიშვნა 3. შევნიშნოთ, რომ ლემა 11-ის შექცეული დებულება საზოგადოდ სამართლიანი არ არის.

ლემა 11-ის საილუსტრაციოდ გამოდგება ნამდვილ რიცხვთა R ღერძზე განსაზღვრული ბორელის, ლებეგის და, საზოგადოდ, ლოკალურად კომპაქტურ პოლონურ ტოპოლოგიურ ჯგუფებზე განსაზღვრული ჰაარის ზომები.
M_1-ით აღვნიშნოთ ყველა არანულოვან σ-სასრულო სეპარაბელურ ზომათა კლასი $\mathbf{R}$-ზე, ხოლო M_2-ით ყველა არანულოვან σ-სასრულო არასეპარაბელურ ზომათა კლასი $\mathbf{R}$-ზე.

თეორემა 14. თუ $f: E \to R$ ფუნქცია არის ფარდობითად ზომადი M_2 კლასის მიმართ, მაშინ ის ასევე ფარდობითად ზომადი იქნება M_1 კლასის მიმართ.

დამტკიცება. დავუშვათ f არის ფარდობითად ზომადი M_2 კლასის მიმართ. მაშინ არსებობს $\mu_0 \in M_2$ ზომა, რომლის მიმართაც მოცემული f ფუნქცია არის ზომადი. აღვნიშნოთ $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ სიმბოლოთი ბორელის σ-ალგებრა $\mathbf{R}$-ზე და შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$\nu\big(f^{-1}(Z)\big) = \mu_0\big(f^{-1}(Z)\big) \quad (\ Z \in \mathcal{B}(\mathbf{R})).$$

ასეთნაირად მივიღებთ თვლადად წარმოქმნილ σ-ალგებრას $\{f^{-1}(B): B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})\}$ და მასზე განსაზღვრულ ν ზომას. საზოგადოდ ასეთნაირად განსაზღვრული ν ზომა შეიძლება აღმოჩნდეს სინგულარული, ე.ი. მან შეიძლება მხოლოდ ორი მნიშვნელობა მიიღოს 0 ან $+\infty$ და ამ შემთხვევაში ν არ არის σ-სასრული. ამ ხარვეზის ასაცილებლად (გამოსასწორებლად) ჩვენ ვიყენებთ მოცემულ პირობას, რომ ამოსავალი μ_0 ზომა არის σ-სასრული, მაშასადამე არსებობს თვლადი ოჯახი $\{X_i: i \in I\}$ ისეთი μ_0-ზომადი სიმრავლეების, რომ

$$\mu_0(X_i) < +\infty \qquad (i \in I), \qquad \cup \{X_i: i \in I\} = E.$$

ახლა ადვილია იმის შემოწმება, რომ σ-ალგებრა წარმოქმნილი

$$\{f^{-1}(B): B \in \mathcal{B}(\mathbf{R})\} \cup \{X_i: i \in I\}$$

გაერთიანებით არის თვლადად წარმოქმნილი, μ_0-ის შევიწროება ამ σ-ალგებრაზე ეკუთვნის M_1 კლასს და f არის ზომადი ფუნქცია ამ შევიწროების მიმართ. მაშასადამე, f არის ფარდობითად ზომადი ფუნქცია M_1 კლასის მიმართ.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ნამდვილმნიშვნელობებიანი ფუნქციების ფარდობითად ზომადობას ზომათა კლასების მიმართ ზოგიერთ შემთხვევაში აქვს წმინდა სიმრავლურ-თეორიული საფუძველი. კერძოდ, ეს საკითხი მჭიდროდ უკავშირდება ფუნქციების გრაფიკის მასიურობას ნამრავლი ზომების მიმართ. თავიდანვე გვინდა აღვნიშნოთ, რომ ფუნქციის გრაფიკის ეს თვისება ანალიზის თვალსაზრისით არის პათოლოგიური, მაგრამ ზომათა კლასების მიმართ ფუნქციის ფარდობითად ზომადობის კუთხით იძლევა საკმაოდ დადებით შედეგს. სანამ უშუალოდ გადავიდოდეთ ამ საკითხზე მოვიყვანოთ დამხმარე დებულება, რომელიც განეკუთვნება უსასრულო კომბინატორიკას.

ლემა 12. ვთქვათ, E არათვლადი სიმრავლეა, $\{Y_j: j \in J\}$ კი E-ს ისეთ ქვესიმრავლეთა ოჯახია, რომ

$$card(J) = card(E);$$

$$(\forall j)\Big(j \in J \Rightarrow card\big(Y_j\big) = card(E)\Big).$$

მაშინ არსებობს E-ს ქვესიმრავლეთა თითქმის დიზუნქტიური $\{X_i: i \in I\}$ ოჯახი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$card(I) > card(J);$$

$$(\forall i)(\forall J)(i \in I \& j \in J \Rightarrow card\big(X_i \cap Y_j\big) = card(E);$$

$$\bigcup_{i \in I} X_i = E.$$

ლემა 12-ის დამტკიცება იხილეთ [70]-ში.

შევნიშნოთ, რომ თუ ყოველი Y_j $(j \in J)$ სიმრავლის როლში განვიხილავთ არათვლად ჩაკეტილ სიმრავლეებს $\mathbf{R}^N$-დან, მაშინ $\{X_i: i \in I\}$ შესაბამისი ოჯახი იქნება R^N-ში ბერნშტეინის სიმრავლეების ოჯახი.

ამ ფაქტის მართებულობას არსებითად გამოვიყენებთ შემდეგი თეორემის დასამტკიცებლად.

დებულება 12. არსებობს ნამდვილმნიშვნელობებიანი ფუნქცია

$$f: \mathbf{R}^N \to \mathbf{R},$$

რომელსაც აქვს შემდეგი თვისება: ნებისმიერი σ-სასრულო დიფუზური ბორელის μ ზომისათვის $\mathbf{R}^N$-ზე და ნებისმიერი σ-სასრული ბორელის ზომისათვის $\mathbf{R}$ -ზე f ფუნქციის გრაფიკი არის $(\mu \times \nu)$-მასიური სიმრავლე $(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R})$-ში.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\{X_t : t \in \mathbf{R}\}$ სიმრავლეთა ოჯახი არის $\mathbf{R}^N$ სივრცის დაშლა ბერნშტეინის სიმრავლეებად. განვსაზღვროთ f ფუნქცია შემდეგი პირობით:

ყოველი $x \in \mathbf{R}^N$-სთვის $f(x) = t$, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $x \in X_t$.

ვთქვათ, μ არის ნებისმიერი σ-სასრულო დიფუზიური ბორელის ზომა $\mathbf{R}^N$-ზე და ν ნებისმიერი σ-სასრულო ზომაა $\mathbf{R}$-ზე.

თუ სრულდება პირობები

$$Z \in dom(\mu \times \nu), \qquad (\mu \times \nu)(Z) > 0,$$

მაშინ, ფუბინის თეორემის თანახმად, არსებობს $t_0 \in \mathbf{R}$ წერტილი ისეთი, რომ

$$\mu(\{x \in \mathbf{R}^N : (x, t_0) \in Z\}) > 0.$$

რადგან $X_{t_0} \subset \mathbf{R}^N$ ბერნშტეინის სიმრავლეა, ამიტომ

$$X_{t_0} \cap (\{x \in \mathbf{R}^N : (x, t_0) \in Z\}) \neq \emptyset.$$

ავიღოთ ნებისმიერი x წერტილი ამ არაცარიელი თანაკვეთიდან, ე.ი.

$$x \in X_{t_0} \cap (\{x \in R^N : (x, t_0) \in Z\}).$$

რადგან $x \in X_{t_0}$, ამიტომ $f(x) = t_0$. ვინაიდან $(x, t_0) \in Z$, ამიტომ

$$\big(x, f(x)\big) \in Z.$$

ეს კი იმას ნიშნავს, რომ f ფუნქციის გრაფიკი თანაიკვეთება ნებისმიერ $(\mu \times \nu)$-დადებითი ზომიან სიმრავლესთან $(R^N \times R)$ -ში. აქედან გამომდინარეობს, რომ f ფუნქციის გრაფიკი $(\mu \times \nu)$-მასიურია $(R^N \times R)$ -ში.

ამით დებულება 12 დამტკიცებულია.

თუ გამოვიყენებთ თეორემა 3-ის დამტკიცებაში განსაზღვრულ f ფუნქციას მივიღებთ შემდეგ დებულებას.

დებულება 13. ნამდვილმნიშვნელობებიანი ფუნქცია

$$f: \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$$

არის ფარდობითად ზომადი $\mathbf{R}^N$ სივრცეში განსაზღვრული σ-სასრულო დიფუზიური ბორელის ზომის გაგრძელებათა კლასის მიმართ.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\mathbf{R}^N$ სიმრავლეში მოცემულია $\sigma-$ სასრულო μ ზომა და ფუნქცია

$$f: \mathbf{R}^N \to \mathbf{R},$$

რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობას:
$ran(f)$ -ზე არსებობს ისეთი ბორელის ალბათური ν ზომა, რომ f ფუნქციის გრაფიკი $(\mu \times \nu)$-მასიურია სიმრავლეთა $\mathbf{R}^N \times \boldsymbol{R}$ დეკარტულ ნამრავლში.
დავუშვათ, რომ $Z \in dom(\mu \times \nu)$ და განვიხილოთ სიმრავლე

$$Z' = \{x \in \mathbf{R}^N: (x, f(x)) \in Z\},$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$S = \{Z': Z \in dom(\mu \times \nu)\}.$$

ცხადია, რომ S არის σ-ალგებრა $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$ სიმრავლეზე და

$$dom(\mu) \subset S$$

S-ზე განვსაზღვროთ ზომა პირობით

$$(\forall Z)(Z \in dom(\mu \times \nu) \Rightarrow \bar{\mu}(Z') = (\mu \times \nu)(Z))$$

ვაჩვენოთ $\bar{\mu}$ ზომის განსაზღვრის კორექტულობა.

ვთქვათ, ადგილი აქვს თანაფარდობას

$$Z' = \{x: (x, f(x)) \in Z_1\} = \{x: (x, f(x)) \in Z_2\},$$

სადაც $Z_1 \in dom(\mu \times \nu)$ და $Z_2 \in dom(\mu \times \nu)$.

Γ_f-ით აღვნიშნოთ f ფუნქციის გრაფიკი $R^N \times R$ სიმრავლეში და დავამტკიცოთ, რომ

$$\Gamma_f \cap (Z_1 \Delta Z_2) = \emptyset.$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ე.ი. არსებობს ისეთი $(x, f(x))$ წერტილი მოცემული f ფუნქციის გრაფიკზე, რომ

$$(x, f(x)) \in Z_1 \Delta Z_2 = (Z_1 \setminus Z_2) \cup (Z_2 \setminus Z_1).$$

ეს იმას ნიშნავს, რომ

$$(x, f(x)) \in Z_1, \ \ (x, f(x)) \notin Z_2$$

ან

$$(x, f(x)) \in Z_2, \ \ (x, f(x)) \notin Z_1$$

ეს კი წინააღმდეგობრივია Z' სიმრავლის წარმოდგენასთან, ე.ი. ვღებულობთ, რომ

$$\Gamma_f \cap (Z_1 \Delta Z_2) = \emptyset.$$

რადგან Γ_f გრაფიკი $(\mu \times \nu)$-მასიურია $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}$ ნამრავლში, ამიტომ გვექნება

$$(\mu \times \nu)(\, Z_1 \Delta Z_2),$$

ეს კი იმაზე მიანიშნებს, რომ

$$(\mu \times \nu)(\, Z_1) = (\mu \times \nu)(Z_2).$$

ამით $\bar{\mu}$ ზომის განსაზღვრის კორექტულობა ნაჩვენებია.
ახლა ვთქვათ, $X \in dom(\mu)$, მაშინ $Z = X \times ran(f) \in dom(\mu \times \nu)$.

აქედან გვექნება $Z' = X$ და

$$\bar{\mu}(Z') = \bar{\mu}(X) = (\mu \times \nu)(X) = \mu(X) \cdot \nu(ran(f)) = \mu(X).$$

ეს ნიშნავს, რომ $\bar{\mu}$ წარმოადგენს μ ზომის გაგრძელებას, ე.ი.

$$\mu \subset \bar{\mu}.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $(\forall B)(B \in \mathrm{B}(\mathbf{R}) \Rightarrow f^{-1}(B) \in S)$.

მართლაც, თუ $x \in f^{-1}(B)$, მაშინ $f(x) \in B$ და ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს

$$\big(x, f(x)\big) \in \mathbf{R}^N \times B \in dom(\mu \times \nu),$$

$$\{x: x \in f^{-1}(B)\} = \big\{x: \big(x, f(x)\big) \in \mathbf{R}^N \times B\big\} \in S$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$f^{-1}(B) \in S$$

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, f ფუნქცია ფარდობითად ზომადია μ ზომის ყველა გაგრძელებათა $M(\mu)$ კლასის მიმართ.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. ხარაზიშვილი ა., "სიმრავლეთა თეორიის საწყისები", ნაწილი I, ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2008.
2. Fraenkel A., "Abstract Set Theory", North-Holland, Amserdam, 1953.
3. Бурбаки. Н, "Теория множеств", изд. Мир, Москва, 1965.
4. Handbook of Mathematical Logic (edited by J. Barwise). Amsterdam: North-Holland Publishing Comp., 1977
5. Solovay R.M., "A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable", Ann. Math., vol. 92, 1970, 1 - 56.
6. ხარაზიშვილი ა., "სიმრავლეთა თეორიის საწყისები", ნაწილი II, საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემია, თბილისი, 2012
7. Харин Н. Н., "Математическая логика и Теория множеств" , изд. "Росвузизд", 1963.
8. Jech T., "Set Theory", Academic Press, New York-London, 1978
9. Shonfield J.R., "Mathematical Logic", Addison-Wesley, Reading, Ma, 1967.
10. Gödel K., "The Consistence of the Axiom of Choice and the generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory", Annals of Math. Studies, Princeton, 1940.
11. Gödel K., "Über die Vollständigkeit des Logikkalküls", Doctoral dissertation, University of Vienna, 1929.
12. Gödel K., „Collected workes: Volume I, workes 1938-1942" , Editor S. Feferman, Oxford University press, Oxford, 1989.
13. Мендельсон Э., "Введение в математическую логику", изд. Наука, Москва 1971.
14. Kuratowski K., A. Mostowski, "Set Theory", North-Holland Publishing company, Amsterdam 1967.
15. Herrlich H., "Axiom of Choice", Springer, Berlin, 2006.
16. Медведев Ф. А. "Раннаяя история аксиомы выбора", Изд. Наука, Москва 1982
17. Levy A., "Basic Set Theory", Springer-Verlag, Berlin, 1979, Reprinted by Dover Publications, 2003.
18. Sierpinski W., "Cardinal and Ordinal Numbers", Warszawa, PWN, 1958.
19. Sierpinski W., "L'Axiome de M. Zermelo et son role dans la Theorie des Ensembles et dans l'Analyse" Bull. Intern. Acad. Sci. Cracovie, Ser. A, 1918, pp. 97-152.
20. Fraenkel A., Bar-Hillel Y., Levy A., "Foundations of Set Theory", Elsevier Amsetrdam London New York Oxford Paris Shannon Tokyo, 1973.
21. Vitali G., Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta, Bologna, Italy, 1905.
22. Bernstein F.. „Zur Theorie der trigonometrischen Reihen", Sitzungsber. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig. Math.-Natur. K1. 60, 1908, pp. 325 - 338.
23. Hamel H., Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Losungen der Funktionalgleichung: $f(x + y) = f(x) + f(y)$, Math. Ann., vol. 60, 1905, pp. 459 - 462.
24. Feferman S., Levy A., "Independence Results in Set Theory by Cohen's Method", Notices Amer. Math. Soc. v.10, 1963, p. 593.
25. Kharazishvili A.B., "Strange Functions in Real Analysis", Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.
26. Cichon J., Kharazishvili A., Werglorz B. „Subsets of the Real Line". Wydawnictwo Uniwersytetu Lodzkiego, Lodz, 1995.
27. Kuratowski K., "Topology", vol. 1. Academic Press, New York-London, 1966.

28. Engelking R., “General Topology”, PWN, Warszawa, 1985.
29. Oxtoby J.C., “ Measure and Category”, Springer-Verlag, Berlin – New York, 1971
30. Morgan II J.C., “Point Set Theory”, Marcel Dekker, Inc., New York – Basel, 1990.
31. Kharazishvili A.B. “Nonmeasurable Sets and Function”, North-Holland Mathematics Studies, Elsevier, Amsterdam, 2004.
32. Kunen K., „Set Theory“, Amsterdam: North-Holland, 1980
33. Jech T., “Axiom of Choice” North-Holland publishing Company – Amsterdam London, American Elsevier Publishing company, New York, 1973.
34. Cohn P.M.. “Universal Algebra”, Harper&Row Publishers, New York, Evanston, London, 1965.
35. Wagon S., “The Banach-Tarski Paradox”, Cambridge University Press, Cambridge, 1985
36. Chagrov A., Zakharyaschev M., “Modal Logic”, Clarendon Press, Oxford, 1997.
37. Blass A., “Existence of bases implies the axiom of choice”, Contemp. Math, V. 31, 1984, pp. 31-34.
38. ხარაზიშვილი ა., “მათემატიკური ესკიზები”, ნაწილი II, ილიას სახელმწიფო უნივესიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2010.
39. Halmos P.R.. “Measure Theory”. Princeton, Van Nostrand, 1950.
40. Steinhaus H., „Sur les distances des points de mesure positive”, Fund. Math., vol. 1, 1920, pp. 93 - 104.
41. Natanson L. P., “The Theory of Functions of a Real Variable”, Izd. Nauka, Moscow, 1957 (in Russian).
42. Shelah S., “Can you take Solovey’s inaccessible away?” Israel Journal of Mathematics, v. 48, n.1, 1984, pp 1-47.
43. Raisonnier I., “A mathematical proof of Shelah’s theorem on the measure problem and related results”, Israel Journal of Mathematic, v.48, n.1, 1984, pp.48-56.
44. Kharazishvili A.B., “Topics in Measure Theory and Real Analysis” Atlantis-Press/World Scientific , Amsterdam-Paris, 2009.
45. Kharazishvili A., Kirtadze A., “On the measurability of functions with respect to certain classes of measures”, Georgian Mathematical Journal, v. 11, n. 3, 2004, pp. 489-494.
46. Kechris A.S., “Classical Descriptive Set Theory”, Springer-Verlag, New York, 1995.
47. Kuczma M.. “An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities: Cauchy's Equation and Jensen's Inequality”. Katowice: PWN, 1985.
48. Gitik M., “All uncountable cardinals can be singular”, Israel Journal of Mathematics, v. 35, n. 1-2, 1980, pp. 61-88.
49. Пхакадзе Ш. С. “К теории лебеговской меры”, Труды Тбилиского матемаеического института им. А.М. Размадзе, 25, 1958, pp. 3-271.
50. Banach S., Kuratowski C.. „Sur une generalisation du probleme de la mesure”. Fund. Math., vol. 14, 1929, pp. 127 – 131.
51. Szpilrajn (Marczewski) E., “On problems of the theory of measure”, Uspekhi Mat. Nauk, vol. 1, no. 2 (12), 1946, pp. 179 - 188 (in Russian).
52. Kharazishvili A.B., “Invariant Extensions of the Lebesgue Measure”, Izd. Tbil. Gos. Univ., Tbilisi, 1983 (in Russian).
53. Kharazishvili A.B.,” Topological Aspects of Measure Theory”, Izd. Naukova Dumka, Kiev, 1984 (in Russian).
54. Hulanicki A., “Invariant extensions of the Lebesgue measure”, Fund.Math., vol. 51, 1962, pp. 111 - 115.
55. Kakutani S., Oxtoby J.,” Construction of a nonseparable invariant extension of the Lebesgue measure space”, Ann. Math., vol. 52, 1950, pp. 580 - 590.

56. Ulam S.,“ Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre“, Fund. Math., vol. 16, 1930, pp.140 - 150.
57. Erdos P, Kakutani S., „On non-denumerable graphs“, Bull. Amer. Math. Soc. 49, 1943, pp. 457-461.
58. Comfort W.W., “Topological groups, in: Handbook of Set-Theoretic Topology”, edited by K.Kunen and J.E.Vaughan, Elsevier Science Publishers B.V., 1984.
59. Dye H.A., “On groups of measure preserving transformations”, Amer. Journ. Math., vol. 81, 1959, 119 - 159; vol. 85, 1963, pp. 551 - 576.
60. Hewitt E., Ross K.A., “Abstract Harmonic Analysis”, vol. I, Springer-Verlag, Berlin, 1963.
61. Kharazishvili A., “On a nonseparable estensions of the Lebesgue measure”, DAN SSSR, vol. 226, n.1, 1976, pp. 69-72.
62. Kharazishvili A.B. “Transformation Groups and Invariant Measures”, World Scientific Publ. Co., Singapore, 1998.
63. Kharazishvili A., Kirtadze A., „On extensions of partial functions“, Exposotiones Mathematicae, vol.25, issue 4, 2007, pp. 345-353
64. Kodaira K., Kakutani S., “A nonseparable translation-invariant extension of the Lebesgue measure space, Ann. Math., vol. 52, 1950, pp. 574-579.
65. G. Pantsulaia, “On Generators of Shy Sets in Polish Groups”, Nova Science Publishers, Inc. New York, 2009
66. Pantsulaia G., “An application of independent families of sets to the measure extension problem”, Georgian Mathematical Journal, v.11, n. 2, 2004, pp. 379-390.
67. Bogachev V. I., “Measure theory”, Springer, Heidelberg, 2006.
68. Kharazishvili A.B., “Transformation Groups and Invariant Measures”, World Scientific Publ. Co., Singapore, 1998.
69. Beriashvili M., Kirtadze A., “Non-separable extension of invariant Borel measures and measurability properties of real-valued functions”, Proc. A. Razmadze Math. Inst. 162(2013), pp. 111-115.
70. M. Beriashvili, “*On some paradoxical subsets of the real line*”, Georgian International Journal of Science and Technology, Volume 6, Number 4, 2014, pp. 265–275.
71. M. Beriashvili and A. Kirtadze**, „***On relative measurability of real-valued functions with respect to some measures in the space* $\boldsymbol{R^N}$ “,Proc. A. Razmadze Mat. Inst. 164, 2014, 95-97
72. M. Beriashvili, A. Kirtadze, *„On the uniqueness property of non-separable extensions of invariant measures and relative measurability of real-valued functions*“, Georgian Mathematical Journal, Vol. 21, Issue 1, 2014, pp. 49-57.
73. Kharazishvili A., “Elements of the combinatorial theory of infinite sets’’, Tbilisi University Press, Tbilisi, 1981.
74. M. Beriashvili, A. Kirtadze, „On the uniqueness property of non-separable extensions of invariant measures and relative measurability of real-valued functions“, Georgian Mathematical Journal, Vol. 21, Issue 1, 2014, pp. 49-57.
75. Fremlin D. “Consequences of Martin’s Axiom”, Cambridge University Press, Cambridge 1984.
76. Gelbaum B., Olmsted J. “Counterexemples in Analysis”, Amserdam, 1964.
77. Cichon J., Kharazishvili A., Werglorz B. „On selectors associated with some subgroups of the Real Line“ Bull. Acad. Sci. of Georgian SSR, vol 144, no.2, 1991.
78. Cichon J., Kharazishvili A., Werglorz B., „On sets of Vitali’s Type“, Proc. Amer. Math. Soc., vol.118, no.4, 1993.
79. Rautenberger W., „Einführung in die Mathematische Logik“, Vieweg, Wiesbaden, 2008.

80. Deiser O., „Einführung in die Mengenlehre“, Springer-Verlag Berlin - Heidelberg, 2002.
81. Deiser O., „Reelle Zahlen“, Springer-Verlag Berlin - Heidelberg. 2008.
82. Мальцев А.И., “Алгебраические системы”, Изд. Наука, Москва, 1970.
83. Kac M., Ulam S.M., “Mathematics and Logic”, Retrospect and Prospects, Fr. A Pr. Publishers, New York, Washington, London, 1968.
84. Chagrov A., Zakharyaschev M., “Modal Logic”, Clarendon Press, Oxford, 1997.
85. Baldwin S.. “Martin's axiom implies a stronger version of Blumberg's theorem“. Real Analysis Exchange, vol. 16, 1990 – 1991, pp. 67 – 73.
86. Banach S., Steinhaus H.. “Sur le principe de la condensation de singularitds“. Fund. Math., vol. 9, 1927, pp. 50 – 61.
87. Brown J .B.. “Restriction theorems in Real Analysis”, Real Analysis Exchange, vol. 20, no. 2, 1994 – 1995, pp. 510 – 526.
88. Ciesielski K., “Set-theoretic real analysis”, Journal of Applied Analysis, vol. 3, no. 2, 1997, pp. 143 – 190.
89. Kharazishvili A.B. “Applications of Set Theory”. Tbilisi: Izd. Tbil. Gos. Univ., 1989 (in Russian).
90. Kharazishvili A.B., “Certain types of invariant measures”, Dokl. Akad. Nauk SSSR, vol. 222, no. 3, 1975, pp. 538 - 540 (in Russian).
91. Kharazishvili A.B., “Selected Topics of Point Set Theory”. Lodz University Press, Lodz, 1996.
92. Kharazishvili A.B., “Some questions concerning invariant extensions of Lebesgue measure”. Real Analysis Exchange, vol. 20, no. 2, 1994 – 1995, pp. 580 – 592.
93. Kharazishvili A.B., “Some remarks on density points and the uniqueness property for invariant extensions of the Lebesgue measure”, Acta Universitatis Carolina - Mathematica et Physica, vol. 35, no. 2, 1994, pp. 33 – 39.
94. Kharazishvili A.B., “Some remarks on the property (N) of Luzin”. Annales Mathematicae Silesianae, vol. 9, 1995, pp. 33 – 42.
95. King B., “Some remarks on difference sets of Bernstein sets”, Real Analysis Exchange, vol. 19, no. 2, 1993 – 1994, pp. 478 -490.
96. Rogers C.A., “A linear Borel set whose difference set is not a Borel set” Bull. London Math. Soc., vol. 2, 1970, pp. 41 – 42.
97. Steinhaus H., „Sur les distances des points de mesure positive”, Fund. Math., vol. 1, 1920, pp. 93 – 104.
98. Banach S., Sur les suites d'ensembles excluant le existence d'une mesure (with comments by E. Marczewski), Coll. Math., vol. 1, 1948, pp. 103 - 108.
99. Brown J.B., Cox G.V., “Classical theory of totally imperfect spaces”, Real Analysis Exchange, vol. 7, 1982, pp. 1 - 39.
100. Brzuchowski J., Cichon J., Grzegorek E., Ryll-Nardzewski C, “On the existence of nonmeasurable unions”, Bull, de L'Acad. Pol. des Sci., vol. 27, no. 6, 1979, pp. 447 - 448.
101. Bukovsky L., “Any partition into Lebesgue measure zero sets produces a non-measurable set”, Bull, de L'Acad. Pol. des Sci., vol. 27, no. 6, 1979, pp. 431 - 435.
102. Doob J.L., On a problem of Marczewski, Coll. Math., vol. 1, no. 3, 1948, pp. 216 - 217.
103. Erdos P., Mauldin R.D., “The nonexistence of certain invariant measures”, Proc. Amer. Math. Soc, vol. 59, 1976, pp. 321 - 322.
104. Gnedenko B.V., Kolmogorov A.N., “Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables”, Gos. Tech. Izdat., Moscow - Leningrad, 1949 (in Russian).

105. Handbook of Mathematical Logic, Part 2, Izd. Nauka, Moskva, 1982 (in Russian, translation from English with comments).
106. Hausdorff F., „Grundzuge der Mengenlehre“, Veit und Co., Leipzig, 1914.
107. Hewitt E., Stromberg K., “Some examples of nonmeasurable sets”, Journ. Austral. Math. Soc, vol. 18, 1974, pp. 236 - 238.
108. Hopf E., “Theory of measures and invariant integrals”, Trans. Amer.Math. Soc, vol. 34, 1932, pp. 373 - 393.
109. Kelley J.L., “General Topology”, D. Van Nostrand, New York, 1955.
110. Kharazishvili A.B., “On nonmeasurable subgroups of the real line”, Journal of Applied Analysis, vol. 2, no. 2, 1996, pp. 171 - 181.
111. Kharazishvili A.B., “On translations of sets and functions”, Journal of Applied Analysis, vol. 1, no. 2, 1995, pp. 145 -158.
112. Kharazishvili A.B., “Some applications of Hamel bases”, Bull. Acad. Sci. Georgian SSR, vol. 85, no. 1, 1977, pp. 17 - 20 (in Russian).
113. Kharazishvili A.B., “Some remarks on density points and the uniqueness property for invariant extensions of the Lebesgue measure”, Acta Universitatis Carolinae, Mathematica et Physica, vol. 35, no. 2, 1994, pp. 33 - 39.
114. Kharazishvili A.B., “Some remarks on nonmeasurable almost invariant sets”, Acta Universitatis Lodziensis, Folia Mathematica, vol. 7, 1995, pp. 41 - 50.
115. Kharazishvili A.B., “Some Questions of Set Theory and Measure Theory”, Izd. Tbil. Gos. Univ., Tbilisi, 1978 (in Russian).
116. Kharazishvili A.B., “Applications of Point Set Theory in Real Analysis”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
117. Kharazishvili A.B., “Some remarks on quasi-invariant and invariant measures”, Real Analysis Exchange, vol. 24, no. 1, 1998 - 1999, pp. 427 - 434.
118. King B., “Some remarks on difference sets of Bernstein sets”, Real Analysis Exchange, vol. 19, no. 2, 1993 - 1994, pp. 478 - 490.
119. Lebesgue H., “Contribution a I'etude des correspondances de M. Zermelo”, Bull, de la Soc. Math. France, vol. 35, 1907, pp. 202 - 214.
120. Lubotzky A., “Discrete Groups, Expanding Graphs and Invariant Measures”, Birkhauser, 1994.
121. Marczewski E., Ryll-Nardzewski C, Sur la mesurabilite des fonctions de plusieurs variables, Ann. de la Societe Polonaise de Mathematique,vol. 25, 1952, 145 - 155.
122. Miller A.W., “Special subsets of the real line, in Handbook of Set-Theoretic Topology”, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1984, pp. 201 - 234.
123. Miller A.W., Popvassilev S.G., “Vitali sets and Hamel bases that are Marczewski measurable”, Fund. Math., vol. 166, no. 3, 2000, pp. 269 - 279.
124. Neumann (von) J., “Ein System algebraisch unabhaengiger Zahlen“, Math. Ann., vol. 99, 1928, 134 - 141.
125. Sierpinski W., “L'hypothese du Continu”, Monogr. Mat., vol. 4, Warsaw, 1934.
126. Sierpinski W., “Sur la question de la mesurabilite de la base de M. Hamel”, Fund. Math., vol. 1, 1920, pp. 105 - 111.
127. Sierpinski W., “Sur une fonction non mesurable partout presque symetrique”, Acta Litt. Scient., Szeged, vol. 8, 1936, pp. 1-6.
128. Sierpinski W., “Sur le paradoxe de la sphere”, Fund. Math., vol. 33,1945, pp. 235 - 244.
129. Sierpiriski W., “Sur les translations des ensembles liniaires”, Fund. Math., vol. 19, 1932, pp. 22 - 28.

130. Sierpiriski W., “Sur un theoreme equivalent a I'hypothese du continu”, Bull. Internat. Acad. Sci. Cracovie Ser. A, 1919, pp. 1 - 3.
131. Sierpiriski W., “Les correspondances multivoques et I'axiome du choix”, Fund. Math., vol. 34, 1947, pp. 39 - 44.
132. Sierpiriski W., Szpilrajn-Marczewski E., “Remarque sur le problem de la mesure”, Fund. Math., vol. 26, 1936, pp. 256 - 261.
133. Solovay R.M., “Real-valued measurable cardinals”, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 12, Axiomatic set theory, Part 1, Providence, 1971, pp. 397 - 428.
134. Szpilrajn (Marczewski) E., “Sur une classe de fonctions de M.Sierpiriski et la classe correspondante d'ensembles”, Fund. Math., vol. 24, 1935, pp. 17 - 34.
135. Szpilrajn (Marczewski) E., „Sur le extension de la mesure lebesguienne”, Fund. Math., vol. 25, 1935, pp. 551 - 558.
136. Szpilrajn (Marczewski) E., The characteristic function of a sequence of sets and some of its applications, Fund. Math., vol. 31, 1938, pp. 207 - 223.
137. Szpilrajn (Marczewski) E., “Sur les ensembles et les functions absolument measurable”, Comp. rend Soc. Sci. Lett. Varsovie, vol. 30, 1937, pp. 39 - 68 (in Polish).